

Т Р У Д Ы
ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. проф. Н. Е. Жуковского

Выпуск 1087

ЗЕМНОЙ РЕЗОНАНС ВЕРТОЛЕТОВ
(Сборник работ)

503391

БИБЛИОТЕКА
КАЗАКСКОГО
АВИАИНСТИТУТА

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ ЦАГИ

Москва 1970

О РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ЗЕМНОГО РЕЗОНАНСА ВЕРТОЛЕТОВ

А. И. ПОЖАЛОСТИН

Земным резонансом принято называть быстро нарастающие колебания (раскачивание) вертолета на земле, связанные с особым рода неустойчивостью, свойственной вертолетам. Впервые с явлением земного резонанса встретились при испытаниях автожиров после того, как в конструкцию втулки несущего винта был введен так называемый вертикальный шарнир, позволяющий лопасти совершать колебания в плоскости вращения винта. В подавляющем большинстве случаев при возникновении земного резонанса колебания прекратить не удавалось и они нарастали вплоть до разрушения вертолета. Лишь в редких случаях колебания удавалось прекратить своевременным выключением двигателя или отрывом от земли. История вертолетостроения знает немало случаев разрушения вертолетов от земного резонанса.

В результате анализа первых случаев земного резонанса стало очевидно, что земной резонанс тесно связан с колебаниями лопастей несущего винта в плоскости вращения. Поэтому в конструкцию втулки был введен специальный демпфер, успокаивающий колебания лопастей в плоскости вращения. Было установлено, что выбором достаточной затяжки этого демпфера можно устранить земной резонанс.

Однако появилась другая серьезная трудность. Вертикальный шарнир на втулке делается специально для того, чтобы уменьшить напряжения изгиба лопасти в плоскости вращения, вызываемые кориолисовыми силами при поступательном полете вертолета. Введение же демпфера на вертикальном шарнире вновь нагружает лопасть изгибом в плоскости вращения, и тем сильнее, чем больше затяжка демпфера. Таким образом, конструктивное мероприятие, позволяющее устранить земной резонанс, дополнительно усложняло проблему обеспечения динамической прочности лопастей несущего винта, которая и по сей день является одной из основных проблем вертолетостроения. Вот почему возникла настоятельная потребность в создании теории земного резонанса, которая позволила бы точно рассчитывать потребные характеристики демпфера вертикального шарнира и изыскать пути уменьшения затяжки демпферов за счет изменения каких-либо других конструктивных параметров вертолета. В частности, было очень важно выявить роль амортизационных стоек шасси в демпфировании колебаний вертолета, так как очевидно, что при раскачивании вертолета на земле амортизационные стойки шасси поглощают энергию колебаний.

Первые результаты теоретического анализа земного резонанса были получены как у нас в стране, так и за границей, во время второй мировой войны. В 1942 г. Б. Я. Жеребцовым были разработаны методы (опубликованные в 1966 г., [1]), позволившие устранить земной резонанс на вер-

толете „Омега“ конструкции И. П. Братухина. В 1943 г. Р. Коулмен [6] рассмотрел задачу об устойчивости движения плоской механической системы, представляющей собой втулку с тяжелыми стержнями (лопастями), укрепленными на ней с помощью вертикальных шарниров с демпферами, установленную на упругом основании; это упругое основание имитировало фюзеляж реального вертолета, установленный на упругом шасси.

Исследование устойчивости такой механической системы приводит к уравнениям движения с периодическими коэффициентами. Коулмен предложил замену переменных (новые обобщенные координаты), которая позволяет свести задачу к уравнениям с постоянными коэффициентами в случае, если число лопастей системы не менее трех.

Б. Я. Жеребцов [1] также предложил замену переменных, несколько отличающуюся от предложенной Коулменом, также позволяющую свести задачу к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Исследования Жеребцова и Коулмена позволяли установить роль шасси и демпфера вертикального шарнира в земном резонансе. В частности, удалось установить весьма важный и простой приближенный критерий устойчивости винта на упругом основании, состоящий в том, что произведение декремента затухания колебаний лопасти на декремент затухания колебания жесткого винта на упругом основании (затухание вертолета на шасси) должно быть не меньше некоторой определенной величины, пропорциональной отношению массы лопастей к массе вертолета.

Позже появились работы А. Файнгольда [7], Р. Коулмена и А. Файнгольда [5], а также Б. Я. Жеребцова и М. А. Лернера [2] об устойчивости винта с двумя лопастями на упругом основании. В этих работах уравнения движения системы записывались во вращающейся вместе с винтом системе координат, что также позволяло освободиться от периодических коэффициентов. Подобный прием для исследования уравнений движения двухлопастного винта указывался также ранее А. И. Пожалостиным (1951 г.).

В 1943 г. появилась работа К. Хохенемзера [8], в которой он несколько иначе получал условия устойчивости для винта на упругом основании, а также сделал попытку учесть влияние упругости лопасти на земной резонанс.

Дальнейшие исследования земного резонанса вертолетов в послевоенный период развиваются в направлении приближения теории к практическим расчетам реальных вертолетов. Опубликованные работы содержат методику расчета земного резонанса вертолетов, которая позволяет для реального вертолета сводить эту задачу к расчету винта на упругом основании. К этим работам следует отнести работы Харвея и Дейча [9] и [10], Хауэрта и Джонса [11].

Исследованию влияния упругости лопасти были посвящены работы А. И. Пожалостина и Л. Н. Гродко, а также работа П. Лиона [13].

Ряд исследований был посвящен уточнению критериев устойчивости Жеребцова — Коулмена для случаев, когда декременты затухания лопасти и шасси сильно различаются. К этим работам следует отнести исследования французских инженеров Жилли и Нормана [12], а также исследования Л. Н. Гродко.

В 1953 г. Б. Я. Жеребцов применил разработанный им метод анализа земного резонанса к двухвинтовому вертолету.

В 1954 г. Б. Я. Жеребцовым и М. А. Лернером [3] было изучено влияние межлопастных буферов и показана их эффективность как средства борьбы с земным резонансом.

В 1958 г. Б. Я. Жеребцовым была практически реализована на двухвинтовом вертолете продольной схемы идея амортизационной стойки с

низким начальным давлением воздуха, в результате чего удалось устранить земной резонанс второго тона.

Следует также указать, что теория земного резонанса была использована Б. Я. Жеребцовым и Л. Н. Гродко при выборе характеристик упруго-демпфирующих опор, обеспечивающих безопасность испытаний несущих винтов на стендах.

Несмотря на наличие большого числа теоретических и экспериментальных исследований в области земного резонанса, до настоящего времени оставался и остается целый ряд нерешенных важных практических вопросов. Так, например, во всех отечественных и зарубежных работах, посвященных земному резонансу, реальные лопасти винта вертолета заменялись тяжелыми шарнирно подвешенными ко втулке стержнями, которые могли отклоняться лишь в плоскости вращения винта. При этом аэродинамические силы не учитывались. Не учитывались также колебания лопасти в плоскости взмаха.

Работа А. Б. Зимина, публикуемая в настоящем сборнике, в известной мере восполняет этот пробел; в ней учитываются аэродинамика лопастей и их маховые колебания и исследовано влияние этих факторов на устойчивость одновинтового вертолета. Обнаружен также новый вид неустойчивости винта на упругой опоре, который не мог быть обнаружен ранее при упрощенной постановке вопроса.

Летные испытания, проведенные в последние годы, обнаружили некоторые особенности земного резонанса при пробеге вертолета. Так, при летных испытаниях некоторых вертолетов оказалось, что при пробеге вертолета по аэродрому может возникнуть земной резонанс даже у таких вертолетов, у которых запас по земному резонансу достаточен, в том случае, когда вертолет неподвижен. Экспериментальные исследования показали, что если у неподвижно стоящего вертолета имеется зона неустойчивости по числам оборотов винта, лежащая выше рабочих чисел оборотов, то при пробеге такого вертолета по земле может возникнуть земной резонанс. Полная теория этого явления содержится в публикуемой в настоящем сборнике работе Л. Н. Гродко, в которой показано, что эффект ухудшения характеристик земного резонанса на пробеге связан с уменьшением боковой жесткости пневматика при его качении по грунту. Это изменение боковой жесткости, а также некоторое дополнительное боковое демпфирование пневматика могут быть рассчитаны, как показал Л. Н. Гродко, по существующей теории шимми носовых ориентирующихся колес. В его работе приведена методика расчета земного резонанса на пробеге.

В последние годы под давлением практики появился ряд исследований земного резонанса вертолетов в нелинейной трактовке. Дело в том, что реальные упругие и демпфирующие элементы вертолетов, как правило, существенно нелинейны. Так, демпферы вертикальных шарниров лопастей на большинстве вертолетов фрикционные. В амортизационных стойках шасси имеется значительное „сухое“ трение, а их гидравлические характеристики близки к квадратичному закону сопротивления. Наконец, при значительных колебаниях вертолета на земле его пневматики начинают отрываться от земли, что приводит к новой нелинейности типа „люфт“.

Наличие существенных нелинейностей в характеристиках упругих и демпфирующих элементов приводит к некоторым качественно новым явлениям, которые не могут быть объяснены в рамках линейной теории земного резонанса. Например, оказалось, что вертолет, устойчивый при малых возмущениях, может оказаться неустойчивым при больших возмущениях, т. е. у реального вертолета существует так называемый порог возбуждения. Это может быть как следствием наличия „сухого“ трения в элементах конструкции (демпфера вертикального шарнира), так и

следствием нелинейности характеристик шасси, обусловленной отрывом от земли пневматиков шасси при большом размахе колебаний.

Другим важным обстоятельством является большая чувствительность вертолета с фрикционными демпферами лопастей к положению ручки управления циклическим шагом. На некоторых вертолетах достаточно отклонить вперед ручку управления циклическим шагом, чтобы начался земной резонанс. Этим свойством удобно пользоваться на практике при проверке вертолета на земной резонанс.

Необходимость расчета земного резонанса вертолетов в нелинейной постановке привела к мысли об использовании для такого расчета электронных моделирующих машин. В Советском Союзе исследования земного резонанса в нелинейной постановке были выполнены А. Н. Белозеровым, который разработал методику электромоделирования земного резонанса и решил основные задачи, связанные с нелинейной постановкой проблемы. Им было проведено первое исследование земного резонанса вертолета с фрикционными демпферами на лопастях винта и земного резонанса с нелинейными характеристиками амортизационных стоек шасси. В этих исследованиях удалось, в частности, внести дополнительную ясность в вопрос о влиянии на демпфирование положения ручки управления циклическим шагом, о котором упоминалось выше.

В публикуемой в настоящем сборнике работе А. Н. Белозерова изложены основные принципы моделирования земного резонанса на электронных моделях и приведены результаты исследования земного резонанса с отрывом пневматиков от земли. В работе показано, что в том случае, когда существует зона неустойчивости выше рабочих чисел оборотов винта, на вертолете может возникнуть земной резонанс при некотором толчке, превышающем порог возбуждения. Амплитуда колебаний не нарастает в этом случае безгранично, — устанавливаются автоколебания. В работе приведены зависимости амплитуды автоколебаний и порога возбуждения от тяги несущего винта.

Из этого исследования А. Н. Белозерова вытекает целый ряд важных практических выводов. Так, например, получается, что при посадке вертолета летчику следует немедленно уменьшить шаг несущего винта, как только пневматики коснулись земли. Своевременное уменьшение общего шага гарантирует от возникновения земного резонанса даже в том случае, когда предварительная затяжка амортизационной стойки шасси имеет значительную величину.

В публикуемой в настоящем сборнике работе Г. В. Вронского рассматривается дальнейшее развитие модели, предложенной А. Н. Белозеровым; она посвящена учету боковой жесткости и демпфирования пневматика при отрыве пневматиков от земли. В работе показано, что боковое демпфирование пневматика оказывает существенное влияние на характер протекания земного резонанса. При величине бокового демпфирования, превышающей некоторое определенное значение, земной резонанс вообще невозможен. Таким образом, границы земного резонанса, найденные по схеме А. Н. Белозерова, определяются с некоторым запасом.

Кроме электромоделирования земного резонанса, представляет интерес расчет земного резонанса по линейной теории с использованием эквивалентных линеаризованных характеристик реальных нелинейных элементов. При таком расчете все характеристики земного резонанса являются функциями амплитуды колебаний, и могут быть выявлены многие особенности нелинейного земного резонанса. В связи с этим представляет интерес публикуемая в настоящем сборнике работа А. Н. Белозерова и Б. М. Литвакова, посвященная исследованию комбинации нелинейной амортизационной стойки с пневматиком. В этой работе показано, как можно рассчитывать земной резонанс, заменяя реальную

нелинейную стойку с пневматиком некоторым эквивалентным линейным элементом, характеристики которого зависят от амплитуды колебаний. Авторы этой работы вывели расчетные формулы для случая амортизационной стойки с сухим трением при наличии линейного и квадратичного закона гидравлического сопротивления. В случае квадратичного закона были получены приближенные формулы, проверенные на электронной модели.

Одновременно с развитием исследований явления земного резонанса появились работы, определяющие подход к выбору параметров вертолета, влияющих на земной резонанс. В числе их можно назвать публикуемую в настоящем сборнике работу Ю. А. Мягова. В этой работе при рассмотрении линейной задачи о земном резонансе вертолета на пробеге получены аналитические выражения для коэффициента демпфирования вертолета, частоты собственных колебаний и коэффициента демпфирования амортизационной стойки, обеспечивающих максимальное демпфирование вертолета. Предложена методика выбора параметров шасси при проектировании вертолета из условия обеспечения запасов по земному резонансу. Автор этой работы проверяет найденные им критерии при земном резонансе с отрывом пневматиков от земли.

Публикуемые в настоящем сборнике работы были выполнены в различное время и докладывались на научных семинарах и конференциях. Интерес широкого круга специалистов к этим работам объясняет издание их в виде специального сборника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жеребцов Б. Я. Динамическая устойчивость несущего винта геликоптера с учетом упругости его опоры. В сб. работ по теоретическому исследованию явления „земного резонанса“ вертолета. Изд. БНИ ЦАГИ, 1966.
2. Жеребцов Б. Я., Лернер М. А. Колебания двухлопастного несущего винта на изотропной упругой опоре. Там же.
3. Жеребцов Б. Я., Лернер М. А. Исследование влияния межлопастных буферов на колебания вертолета. Там же.
4. Гродко Л. Н. Земной резонанс. „Вертолеты“, ч. II, Изд. „Машиностроение“, 1967.
5. Coleman R., Feingold. Theory of ground vibrations on a two-bladed helicopter rotor on anisotropic flexible supports. NACA TN No. 1184, 1947.
6. Coleman R. Theory of self-excited mechanical oscillations of hinged rotor blades. NACA, ARR No. 3G29, July 1943.
7. Feingold A. M. Theory of mechanical oscillations of rotors with two-hinged blades. NACA, ARR No. 3113, September 1943.
8. Hohenemser K. Zur Dynamik von umlaufenden gelenkig an die Nabe angeschlossenen und in der Umlaufebene schwingenden Stüben. Ingenieur-Archiv, Bd. XIV, 1943, S. 83—95, ill. 14.
9. Horvay G. Vibrations of a helicopter on the ground. JAS, No. 11, November 1946.
10. Deutsch M. L. Ground vibrations of helicopters. JAS, vol. 13, No. 5, May 1946.
11. Howarth R. M., Jones C. H. Ground resonance of the helicopter. The Journal of the Helicopter Association of Great Britain, vol. 7, No. 4, April 1954.
12. Gilly J., Normand Y. Stabilité au sol des hélicoptères tripales. „Technique et Science Aéronautiques“, 6, 1952.
13. Leone P. F. Mechanical stability of a two-bladed cantilever helicopter rotor. JAS, No. 7, July 1956.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗЕМНОГО РЕЗОНАНСА ВЕРТОЛЕТА ПРИ НАЛИЧИИ МАХОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТЕЙ НЕСУЩЕГО ВИНТА

А. Б. ЗИМИН

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследуется устойчивость движения однороторного вертолета на земле, имеющего две степени свободы корпуса (колебания вокруг продольной и поперечной осей вертолета) с учетом махового движения лопастей.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- R — радиус несущего винта;
 m_{Φ} — масса вертолета без лопастей;
 m_{λ} — масса лопастей;
 k — число лопастей;
 $\bar{k}$ — характеристика регулятора взмаха;
 ρ — плотность воздуха;
 $b(r)$ — хорда лопасти;
 r — текущий радиус;
 θ — угол боковой качки;
 ϑ — угол продольной качки;
 ψ — угол рысканья;
 I_x — момент инерции корпуса вертолета относительно оси Ox ;
 I_y — момент инерции корпуса вертолета относительно оси Oy ;
 I_z — момент инерции корпуса вертолета относительно оси Oz ;
 I_2 — момент инерции лопасти относительно вертикального шарнира;
 S — статический момент массы лопасти относительно вертикального шарнира;
 I — момент инерции лопасти относительно оси вращения винта;
 l_2 — расстояние от центра втулки несущего винта до вертикального шарнира;
 $2n_2 = \frac{k_2}{I_2}$ — демпфирование в вертикальном шарнире, отнесенное к моменту инерции лопасти I_2 ;
 $I_1 = \int_{l_2}^R r(r-l_2) dm$; $v_0 = \frac{I_1 - I_2}{I_2}$; $\varepsilon_{\vartheta} = \frac{y_0 S}{I_z + km_{\lambda} y_0^2 + \frac{k}{2} I}$;
 $2n_{\vartheta} = \frac{2k_3 y z_3^2 + k_{ny} x_n^2}{I_z + km_{\lambda} y_0^2 + \frac{k}{2} I}$; $\varepsilon_{\theta} = \frac{y_0 S}{I_x + km_{\lambda} y_0^2 + \frac{k}{2} I}$;
 $p_{\vartheta}^2 = \frac{2c_3 y z_3^2 + c_{ny} x_n^2}{I_z + km_{\lambda} y_0^2 + \frac{k}{2} I}$; $2\mu_{\theta} = \frac{I}{I_x + km_{\lambda} y_0^2 + \frac{k}{2} I}$;
 $2n_{\theta} = \frac{2k_3 y z_3^2 + 2k_3 z y_{\text{ш}}^2 + k_{nz} y_{\text{ш}}^2}{I_x + km_{\lambda} y_0^2 + \frac{k}{2} I}$; $2\mu_{\vartheta} = \frac{I}{I_z + km_{\lambda} y_0^2 + \frac{k}{2} I}$;
 $p_{\theta}^2 = \frac{2c_3 y z_3^2 + 2c_3 z y_{\text{ш}}^2 + c_{nz} y_{\text{ш}}^2}{I_x + km_{\lambda} y_0^2 + \frac{k}{2} I}$; $\varepsilon_z = \frac{S}{I_2} \frac{k}{2}$; $\frac{\gamma}{4} = \frac{c_y^2 p}{2 I_2} \int_{l_0}^R br^3 dr$.

ВВЕДЕНИЕ

Изучению колебательной неустойчивости вертолетов на земле, так называемому земному резонансу, посвящен целый ряд теоретических и экспериментальных исследований. В результате этих исследований было установлено [1], что определяющим это явление фактором является динамический разбаланс лопастей несущего винта, имеющих вертикальные шарниры, и что интенсивное нарастание колебаний имеет место в определенных диапазонах чисел оборотов несущего винта. Было получено основное количественное соотношение, позволившее определить потребное для устранения колебательной неустойчивости демпфирование в конструкции в зависимости от ее параметров [1]. Однако во всех этих исследованиях корпус вертолета рассматривался как твердое тело, имеющее одну или две степени свободы. Влияние махового движения лопастей несущего винта и остальных степеней свободы корпуса вертолета на потребное демпфирование и характер областей колебательной неустойчивости не изучалось.

В настоящей работе исследуется устойчивость движения однороторного вертолета на земле, имеющего две степени свободы корпуса (колебания вокруг продольной и поперечной осей вертолета) с учетом махового движения лопастей.

Первая часть работы носит методический характер. В ней рассматривается возмущенное движение однороторного вертолета, корпус которого имеет шесть степеней свободы и лопасти имеют вертикальные, горизонтальные и осевые шарниры. Дифференциальные уравнения возмущенного движения вертолета для этого случая выводились при следующих предположениях:

- 1) лопасти абсолютно жесткие;
- 2) тяга несущего винта равна нулю;
- 3) угловая скорость вращения несущего винта постоянна;
- 4) число лопастей несущего винта больше трех.

Во второй части работы с помощью электронной модели анализируется устойчивость движения однороторного вертолета, корпус которого имеет две степени свободы, а лопасти — вертикальные, горизонтальные и осевые шарниры.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОРПУСА ВЕРТОЛЕТА

Рассмотрим однороторный вертолет. Введем систему координат $Ox_g y_g z_g$ (фиг. 1), неподвижно связанную с землей. В этой системе центр тяжести вертолета имеет координаты x_c, y_c, z_c . В центр тяжести вертолета поместим систему координат $Ox_g y_g z_g$, оси которой при движении вертолета остаются параллельными осям неподвижной системы координат. В центре тяжести вертолета поместим третью систему координат Ox_{yz} , неподвижно связанную с корпусом вертолета.

Для получения уравнений движения корпуса вертолета найдем выражение для кинетической энергии. Рассмотрим вертолет без лопастей. Кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного перемещения всей массы корпуса вертолета, помещенной в его центр тяжести, и кинетической энергии вращательного движения корпуса вокруг центра тяжести:

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2} m_{\Phi} [\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2] + \frac{1}{2} [I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2 - 2 I_{yz} qr - 2 I_{xz} pr - 2 I_{xy} pq],$$

где p, q, r — проекции угловой скорости вращательного движения вертолета; $I_x, I_y, I_z, I_{yz}, I_{xz}, I_{xy}$ — моменты инерции вертолета относительно осей, связанных с вертолетом.

В дальнейшем рассматриваются только малые колебания, под которыми понимается такое движение вертолета, при котором с достаточной степенью точности можно в выражении для кинетической энергии пренебречь членами выше второго порядка малости.

В табл. 1 приводятся направляющие косинусы при переходе от системы $Ox'_g y'_g z'_g$ к системе $Oxyz$, которые легко получить, рассматривая фиг. 1. Направляющие косинусы написаны с точностью до величин

Т а б л и ц а 1

	Ox'_g	Oy'_g	Oz'_g
Ox	$1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2}$	θ	$-\psi$
Oy	$-\theta + \theta\psi$	$1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2}$	$\theta + \theta\psi$
Oz	$\psi + \theta\theta$	$-\theta$	$1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2}$

второго порядка малости. С помощью этой таблицы легко установить, что с точностью до величин второго порядка малости

$$p = \dot{\theta}, \quad q = \dot{\psi}, \quad r = \dot{\theta}.$$

Отсюда следует, что выражение для кинетической энергии корпуса вертолета с точностью до величин второго порядка малости будет иметь вид:

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2} m_{\Phi} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} (I_x \dot{\theta}^2 + I_y \dot{\psi}^2 + I_z \dot{\theta}^2 - 2 I_{yz} \dot{\psi} \dot{\theta} - 2 I_{xz} \dot{\theta} \dot{\theta} - 2 I_{xy} \dot{\theta} \dot{\psi}).$$

Поскольку плоскость ux является плоскостью симметрии для подобного типа вертолетов, то $I_{yz} = 0$ и $I_{xz} = 0$.

Таким образом, выражение для кинетической энергии корпуса вертолета принимает вид:

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2} m_{\Phi} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} (I_x \dot{\theta}^2 + I_y \dot{\psi}^2 + I_z \dot{\theta}^2 - 2 I_{xy} \dot{\theta} \dot{\psi}). \quad (1)$$

Кинетическая энергия всего вертолета равна сумме кинетической энергии корпуса и кинетической энергии лопастей:

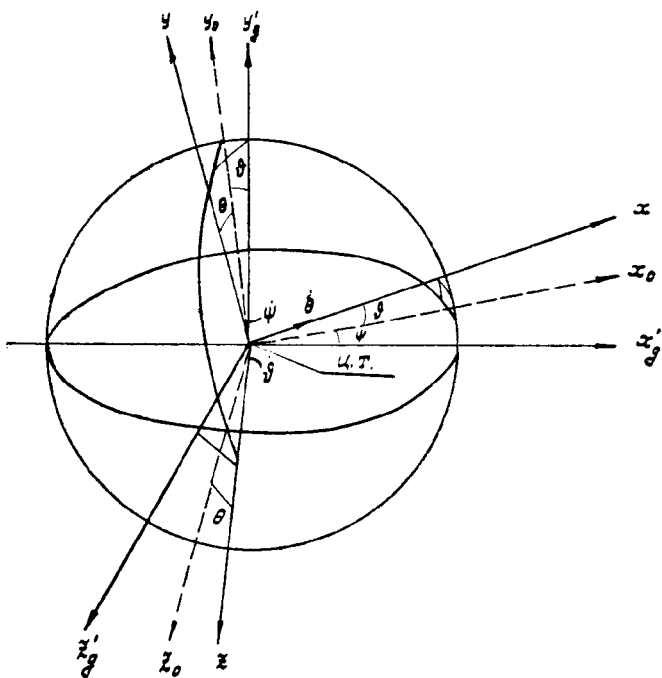
$$T = T_{\Phi} + \sum_{j=1}^k T_{\lambda j},$$

где j — номер j -й лопасти.

Найдем выражение для T_{lj} .

Начало систем координат $Oxyz$ и $Ox'_g y'_g z'_g$ совместим с центром втулки (см. фиг. 1) несущего винта.

Будем дополнительно предполагать, что 1) центр тяжести вертолета лежит на оси Oy'_g на расстоянии y_0 от центра втулки несущего винта, 2) горизонтальные шарниры совмещены с центром втулки несущего винта.



Фиг. 1

Кинетическая энергия элемента dr j -й лопасти равна:

$$dT_{\text{nj}} = \frac{1}{9} (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) dm, \quad (2)$$

где $\dot{x}_g, \dot{y}_g, \dot{z}_g$ — составляющие скорости этого элемента в неподвижной системе координат. Чтобы найти кинетическую энергию всех лопастей, необходимо найти эти составляющие скорости.

В системе $Oxuz$ элемент лопасти dr имеет следующие координаты (фиг. 2):

$$\left. \begin{aligned} x &= l_2 \cos \psi_j + r_1 \cos(\psi_j + \gamma_j) \cos \beta_j, \\ y &= r \sin \beta_j, \\ z &= -l_2 \sin \psi_j - r_1 \sin(\psi_j + \gamma_j) \cos \beta_j. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\psi_j = \omega t + \frac{2\pi(j-1)}{k}$ — угол азимутального положения j -й лопасти;

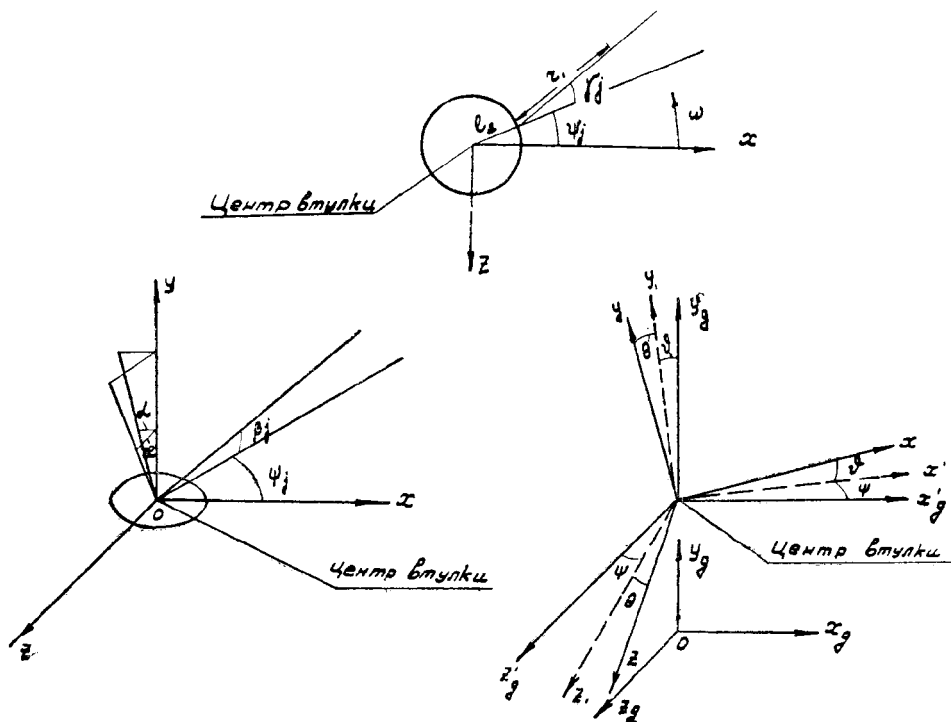
β_j — угол взмаха j -й лопасти; отсчитывается от плоскости вращения втулки; положительный — вверх;

γ — угол поворота лопасти относительно вертикального шарнира; положителен в направлении вращения.

Остальные обозначения ясны из фиг. 2.

Используя таблицу направляющих косинусов и отбрасывая члены выше второго порядка малости, найдем формулы перехода от системы $Oxyz$ к системе $Ox_g'y_g'z_g'$:

$$\left. \begin{aligned} x_g' &= x \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2} \right) + z\psi - y\theta + y\theta\psi + z\theta\psi; \\ y_g' &= y \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2} \right) - z\theta + x\psi; \\ z_g' &= z \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2} \right) - x\psi + y\theta + y\theta\psi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



Фиг. 2

Переход от системы координат $Ox_g'y_g'z_g'$ к неподвижной системе $Ox_gy_gz_g$ определяется соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x_g &= x_c + x_g' - y_0\theta + y_0\theta\psi; \\ y_g &= y_c + y_g' + y_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2} \right); \\ z_g &= z_c + y_0\theta + z_g' + y_0\theta\psi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Используя соотношения (3) — (5), найдем координаты элемента dr j -й лопасти в неподвижной системе координат $Ox_gy_gz_g$:

$$\begin{aligned} x_g &= x_c - y_0(\theta - \theta\psi) + r \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2} \right) \cos \psi_j - r \frac{\beta_j^2}{2} \cos \psi_j - \\ &- r \beta_j \theta - r \psi \sin \psi_j - r \theta \sin \psi_j - r_1 \left(\gamma_j \sin \psi_j + \frac{\gamma_j^2}{2} \cos \psi_j + \gamma_j \psi \cos \psi_j \right); \end{aligned}$$

$$y_g = y_c + y_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\vartheta^2}{2} \right) + r\beta_j + (r \cos \psi_j - r_1 \gamma_j \sin \psi_j) \vartheta + \\ + (r \sin \psi_j + r_1 \gamma_j \cos \psi_j) \theta; \\ z_g = z_c + y_0 (\theta + \vartheta \psi) - r \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\psi^2}{2} \right) \sin \psi_j + r \frac{\beta_j^2}{2} \sin \psi_j + \\ + r\beta_j \theta - r\psi \cos \psi_j - r_1 \left(\gamma_j \cos \psi_j - \gamma_j \psi \sin \psi_j - \frac{\gamma_j^2}{2} \sin \psi_j \right).$$

Дифференцируя полученные соотношения, найдем составляющие скорости элемента dr j -й лопасти $\dot{x}_g$, $\dot{y}_g$ и $\dot{z}_g$ в неподвижной системе координат $Qx_g y_g z_g$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_g &= \dot{x}_c - y_0 (\dot{\theta} - \dot{\theta}\psi - \dot{\psi}\theta) - r\omega \sin \psi_j - r\omega\psi \cos \psi_j - r\dot{\psi} \sin \psi_j - \\ &- r_1 \dot{\gamma}_j \sin \psi_j - r_1 \omega \gamma_j \cos \psi_j + r\omega \frac{\beta_j^2}{2} \sin \psi_j + r_1 \omega \frac{\gamma_j^2}{2} \sin \psi_j + \\ &+ r\omega \left(\frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\psi^2}{2} \right) \sin \psi_j - r(\dot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\psi}\dot{\theta}) \cos \psi_j - r_1 \dot{\gamma}_j \dot{\psi} \cos \psi_j - \\ &- r_1 \gamma_j \dot{\psi} \cos \psi_j + r_1 \gamma_j \dot{\omega} \sin \psi_j - r\dot{\beta}_j \dot{\theta} - r\beta_j \dot{\theta} - r\dot{\theta}\dot{\theta} \sin \psi_j - \\ &- r\theta\dot{\theta} \sin \psi_j - r\theta\dot{\theta}\omega \cos \psi_j - r\beta_j \dot{\beta}_j \cos \psi_j - r_1 \gamma_j \dot{\gamma}_j \cos \psi_j; \\ \dot{y}_g &= \dot{y}_c - y_0 (\dot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\psi}) + r\dot{\beta}_j + r\dot{\theta} \cos \psi_j + r\dot{\theta} \sin \psi_j - r\dot{\theta}\omega \sin \psi_j + \\ &+ r\omega\theta \cos \psi_j - r_1 \dot{\gamma}_j \dot{\theta} \sin \psi_j + r_1 \dot{\gamma}_j \theta \cos \psi_j - r_1 \dot{\gamma}_j \dot{\theta} \sin \psi_j - \\ &- r_1 \gamma_j \omega \dot{\theta} \cos \psi_j + r_1 \gamma_j \dot{\theta} \cos \psi_j - r_1 \gamma_j \omega \theta \sin \psi_j; \\ \dot{z}_g &= \dot{z}_c + y_0 (\dot{\theta} + \dot{\theta}\psi + \dot{\psi}\dot{\theta}) - r\omega \cos \psi_j + r\omega\psi \sin \psi_j - r\dot{\psi} \cos \psi_j - \\ &- r_1 \dot{\gamma}_j \cos \psi_j + r_1 \dot{\gamma}_j \omega \sin \psi_j + r_1 \dot{\gamma}_j \psi \sin \psi_j + r_1 \gamma_j \dot{\psi} \sin \psi_j + \\ &+ r_1 \gamma_j \omega \cos \psi_j + r\dot{\theta}\beta_j + r\theta\dot{\beta}_j + r(\dot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\theta}) \sin \psi_j + \\ &+ r\omega \left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\psi^2}{2} \right) \cos \psi_j + r_1 \frac{\gamma_j^2}{2} \omega \cos \psi_j + r_1 \gamma_j \dot{\gamma}_j \sin \psi_j + \\ &+ r\omega \frac{\beta_j^2}{2} \cos \psi_j + r\beta_j \dot{\beta}_j \sin \psi_j. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Отбрасывая члены выше первого порядка, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_g &= \dot{x}_c - y_0 \dot{\theta} - r\omega \sin \psi_j - r\omega\psi \cos \psi_j - r\dot{\psi} \sin \psi_j - r_1 \dot{\gamma}_j \sin \psi_j - \\ &- r_1 \omega \gamma_j \cos \psi_j; \\ \dot{y}_g &= \dot{y}_c + r\dot{\beta}_j + r\dot{\theta} \cos \psi_j + r\dot{\theta} \sin \psi_j - r\dot{\theta} \sin \psi_j + r\omega\theta \cos \psi_j; \\ \dot{z}_g &= \dot{z}_c + y_0 \dot{\theta} - r\omega \cos \psi_j + r\omega\psi \sin \psi_j - r\dot{\psi} \cos \psi_j - r_1 \dot{\gamma}_j \cos \psi_j + \\ &+ r_1 \omega \gamma_j \sin \psi_j. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Составим уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \left(T_\Phi + \sum_{j=1}^k T_{\lambda j} \right)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \left(T_\Phi + \sum_{j=1}^k T_{\lambda j} \right)}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, 6), \quad (8)$$

где

$$q_1 = x_c; \quad q_2 = y_c; \quad q_3 = z_c; \quad q_4 = \theta; \quad q_5 = \psi; \quad q_6 = \vartheta;$$

$$T_{\pi j} = \int_0^R dT_{\pi j}; \quad (9)$$

Q_i — обобщенные сил;

$$Q_1 = Q_x, \quad Q_2 = Q_y, \quad Q_3 = Q_z, \quad Q_4 = Q_\theta, \quad Q_5 = Q_\psi, \quad Q_6 = Q_\varphi.$$

Следует учитывать, что при составлении выражения $\sum_{j=1}^k T_{\pi j}$ отбрасываются члены выше второго порядка малости. Используя соотношения (1), (6) — (9), легко получить уравнения движения корпуса вертолета.

Используя обозначения, приведенные в начале работы, после преобразований получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} & \left(I_x + km_{\pi} y_0^2 + I \frac{k}{2} \right) \ddot{\theta} + km_{\pi} y_0 \ddot{z}_c - I_{xy} \ddot{\psi} - I \omega k \dot{\theta} - \\ & - y_0 S \left[\sum_{j=1}^k (\ddot{\gamma}_j - \omega^2 \gamma_j) \cos \psi_j - 2 \omega \dot{\gamma}_j \sin \psi_j \right] + \\ & + I \sum_{j=1}^k (\ddot{\beta}_j + \omega^2 \beta_j) \sin \psi_j = Q_\theta; \\ & (I_y + kI) \ddot{\psi} - I_{xy} \ddot{\theta} + I_1 \sum_{j=1}^k \ddot{\gamma}_j = Q_\psi; \\ & \left(I_z + km_{\pi} y_0^2 + I \frac{k}{2} \right) \ddot{\theta} - km_{\pi} y_0 \ddot{x}_c + I \omega k \dot{\theta} + I \sum_{j=1}^k (\ddot{\beta}_j + \omega^2 \beta_j) \cos \psi_j + \\ & + y_0 S \left[\sum_{j=1}^k (\ddot{\gamma}_j - \omega^2 \gamma_j) \sin \psi_j + 2 \omega \dot{\gamma}_j \cos \psi_j \right] = Q_\varphi; \\ & (m_\phi + km_{\pi}) \ddot{x}_c - km_{\pi} y_0 \ddot{\theta} - S \left[\sum_{j=1}^k (\ddot{\gamma}_j - \omega^2 \gamma_j) \sin \psi_j + 2 \omega \dot{\gamma}_j \cos \psi_j \right] = Q_x; \\ & (m_\phi + km_{\pi}) \ddot{y}_c + S \sum_{j=1}^k \ddot{\beta}_j = Q_y; \\ & (m_\phi + km_{\pi}) \ddot{z}_c + km_{\pi} y_0 \ddot{\theta} - S \left[\sum_{j=1}^k (\ddot{\gamma}_j - \omega^2 \gamma_j) \cos \psi_j - 2 \omega \dot{\gamma}_j \sin \psi_j \right] = Q_z. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛОПАСТЕЙ

Зная выражение для кинетической энергии j -й лопасти $T_{\pi j}$, можно написать соответствующие уравнения движения. Уравнения Лагранжа в этом случае будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\pi j}}{\partial \dot{\gamma}_j} - \frac{\partial T_{\pi j}}{\partial \gamma_j} = Q_{\gamma_j};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\pi j}}{\partial \dot{\beta}_j} - \frac{\partial T_{\pi j}}{\partial \beta_j} = Q_{\beta_j};$$

$$j = 1, \dots, k.$$

После преобразований получим следующие уравнения движения j -й лопасти:

$$\left. \begin{aligned} I_2 \ddot{\gamma}_j + I_1 \ddot{\psi} + \omega^2 (I_1 - I_2) \gamma_j - S(y_0 \ddot{\theta} + \ddot{z}_c) \cos \psi_j - S(\ddot{x}_c - y_0 \ddot{\theta}) \sin \psi_j &= Q_{\gamma_j}; \\ I \ddot{\beta}_j + I \ddot{\theta} \cos \psi_j + I \ddot{\theta} \sin \psi_j - 2 I \omega \dot{\theta} \sin \psi_j + 2 I \omega \dot{\theta} \cos \psi_j + I \omega^2 \beta_j &= Q_{\beta_j}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$j = 1, 2, \dots, k.$$

Положив в уравнениях (11) $\psi = \theta = \vartheta = r_c = x_c = y_c = Q_{\gamma_j} = Q_{\beta_j} = 0$ и поделив на I_2 и I соответственно, получим:

$$\ddot{\gamma}_j + \omega^2 \gamma_j = 0; \quad \ddot{\beta}_j + \omega^2 \beta_j = 0.$$

Отсюда следует, что в этом случае j -я лопасть может совершать маятниковые колебания с частотой ω_{γ_0} в плоскости вращения и с частотой ω в плоскости взмаха.

§ 3. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

На корпус и лопасти вертолета, находящегося на земле, действуют силы и моменты, создаваемые аэродинамической нагрузкой на лопасти, силами веса, силами упругости в амортизационных стойках и пневматиках, силами трения в вертикальных шарнирах. Так как в этой работе рассматривается возмущенное движение вертолета, т. е. такое движение, которое характеризуется малыми линейными и угловыми перемещениями относительно некоторого статического положения равновесия, то в выражениях для обобщенных сил не войдут члены, определяющие статическое равновесие корпуса и лопастей вертолета. Поэтому в дальнейшем эти составляющие обобщенных сил не рассматриваются.

Выражения для обобщенных сил, которые определяются упругими и демпфирующими характеристиками посадочных устройств вертолета, будут зависеть от конструктивных особенностей этих устройств.

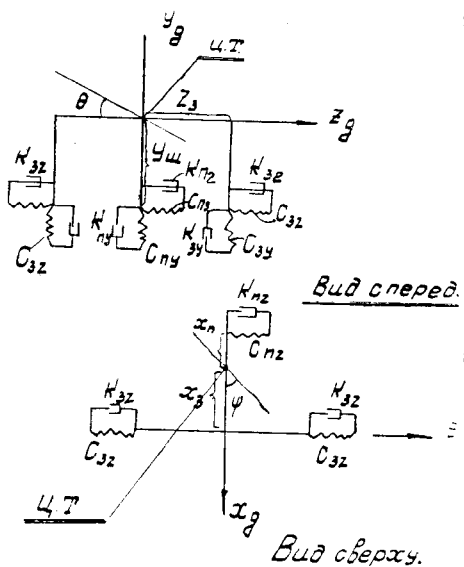
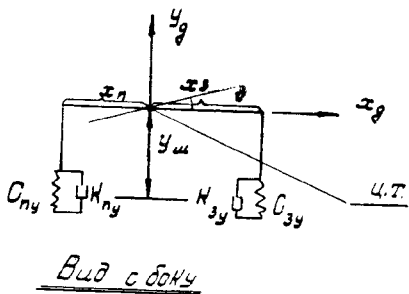
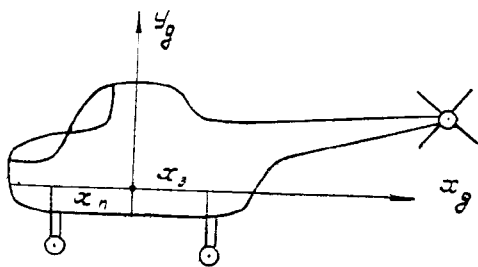
На фиг. 3 схематически показаны упругие и демпфирующие характеристики шасси вертолета Ми-4, приведенные к соответствующим осям. Пользуясь этими схемами и предполагая отсутствие сил упругости и демпфирования в направлении оси Ox'_g , напомним:

$$\left. \begin{aligned} Q_{x'}^1 &= 0; \\ Q_y^1 &= -(2c_{3y} + c_{ny})y_c - \dot{\vartheta}(c_{ny}x_n - 2c_{3y}x_3) - (2k_{3y} + k_{ny})\dot{y}_c - \\ &\quad - \dot{\vartheta}(k_{ny}x_n - 2k_{3y}x_3); \\ Q_z^1 &= -(2c_{3z} + c_{nz})z - (-2c_{3z}y_{\text{ш}} - c_{nz}y_{\text{ш}})\dot{\theta} - (2c_{3z}x_3 - c_{nz}x_n)\dot{\psi} - \\ &\quad - (2k_{3z} + k_{nz})\dot{z} - (-2k_{3z}y_{\text{ш}} - k_{nz}y_{\text{ш}})\dot{\theta} - (2k_{3z}x_3 - k_{nz}x_n)\dot{\psi}; \\ Q_{\theta}^1 &= -(2c_{3y}z_3^2 + 2c_{3z}y_{\text{ш}}^2 + c_{nz}y_{\text{ш}}^2)\dot{\theta} - (-2c_{3z}y_{\text{ш}} - c_{nz}y_{\text{ш}})z - \\ &\quad - (2k_{3y}z_3^2 + 2k_{3z}y_{\text{ш}}^2 + k_{nz}y_{\text{ш}}^2)\dot{\theta} - (-2k_{3z}y_{\text{ш}} - k_{nz}y_{\text{ш}})\dot{z}; \\ Q_{\psi}^1 &= -(2c_{3z}x_3^2 + c_{nz}x_n^2)\dot{\psi} - (-2c_{3z}x_3 + c_{nz}x_n)z - (2k_{3z}x_3^2 + \\ &\quad + k_{nz}x_n^2)\dot{\psi} - (-2k_{3z}x_3 + k_{nz}x_n)\dot{z}; \\ Q_{\vartheta}^1 &= -(2c_{3y}x_3^2 + c_{ny}x_n^2)\dot{\vartheta} - (2k_{3y}x_3^2 + k_{ny}x_n^2)\dot{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Обобщенные силы, вызванные демпфированием в вертикальных шарнирах, имеют вид:

$$Q_j^1 = -k_2 \dot{\gamma}_j; \quad j = 1, \dots, k, \quad (13)$$

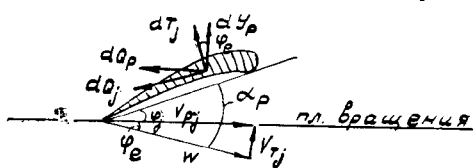
где k_2 — характеристика лопастного демпфера.



Фиг. 3

§ 4. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛОПАСТЬ НЕСУЩЕГО ВИНТА

Найдем аэродинамические силы, действующие на каждый элемент j -й лопасти длиной dr (фиг. 4). Этот элемент лопасти обдувается воздушным потоком со скоростью W , образующим с аэродинамической хордой профиля угол атаки α_p , и на него будут действовать подъемная сила dY_p и лобовое сопротивление dQ_p . В соответствии с формулами экспериментальной аэродинамики можно написать:



Фиг. 4

$$dQ_p = \frac{\rho W^2}{2} b c_{xp} dr;$$

$$dY_p = \frac{\rho W^3}{2} bc_y dr.$$

Сила dY_p направлена по перпендикуляру к скорости W , образующей с плоскостью вращения элемента dr угол φ_c . Сила dQ_p направлена по скорости W .

Найдем силу тяги и силу сопротивления элемента лопасти [3]:

$$dT_j = dY_p \cos \varphi_e - dQ_p \sin \varphi_e;$$

$$dQ_j = dY_p \sin \varphi_e + dQ_p \cos \varphi_e.$$

У несущих винтов угол φ_e мал, поэтому можно принять $\sin \varphi_e = \varphi_e$ и $\cos \varphi_e = 1$. Тогда

$$dT_j = dY_p - dQ_p \varphi_e;$$

$$dQ_j = dY_p \varphi_e + dQ_p.$$

Так как φ_e и dQ_p малы, вторым членом в выражении для dT_j можно пренебречь, тогда:

$$dT_j = \frac{\rho W^2}{2} bc_y^\alpha \alpha_p dr, \quad (14)$$

где α_p — угол атаки элемента j -й лопасти.

Аналогично получаем выражение для dQ_j :

$$dQ_j = \frac{\rho W^2}{2} bc_y^\alpha \alpha_p \varphi_e dr + \frac{\rho W^2}{2} bc_{xp} dr.$$

Преобразуем (15), учитывая, что

$$\alpha_p = \varphi_j + \frac{V_{Tj}}{V_{pj}}; \quad \varphi_e = \frac{V_{Tj}}{V_{pj}}, \quad (15)$$

где V_{pj} — составляющая скорости набегающего потока в плоскости вращения элемента j -й лопасти;

V_{Tj} — составляющая скорости набегающего потока, перпендикулярная к V_{pj} ;

φ_j — угол между аэродинамической хордой и плоскостью вращения элемента j -й лопасти.

Для получения выражений V_{Tj} и V_{pj} воспользуемся таблицей направляющих косинусов (табл. 2), написанной с точностью до величин второго порядка малости, а также выражениями (7) для составляющих скорости элемента dr j -й лопасти в неподвижной системе координат.

Таблица 2

	Ox'_g	Oy'_g	Oz'_g
Ox	1	ϑ	$-\psi$
Oy	$-\vartheta$	1	θ
Oz	ψ	$-\theta$	1

Тогда составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ в системе координат, повернутой относительно неподвижной системы на углы ψ , θ и ϑ , с точностью до величин первого порядка малости будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_g - \dot{z}_g \psi; \\ \dot{y} &= \dot{y}_g - \dot{x}_g \vartheta + \dot{z}_g \theta; \\ \dot{z} &= \dot{z}_g + \dot{x}_g \psi. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Составляющая скорости V_{pj} выражается через $\dot{z}_g$ и $\dot{x}_g$ следующим образом:

$$V_{pj} = -[(\dot{z}_g + \dot{x}_g \psi) \cos(\psi_j + \gamma_j) + (\dot{x}_g - \dot{z}_g \psi) \sin(\psi_j + \gamma_j)].$$

После преобразований получим:

$$V_{pj} = r\omega + \dot{r}\psi + (r - l_2)\dot{\gamma}_j - (\dot{x}_c - y_0\dot{\theta}) \sin \psi_j - (\dot{z}_c + y_0\dot{\theta}) \cos \psi_j. \quad (17)$$

Аналогично, используя соотношение

$$V_{Tj} = -\dot{y} - V_{\text{инд}},$$

получим

$$V_{Tj} = -r\dot{\beta}_j - r\dot{\vartheta} \cos \psi_j - r\dot{\theta} \sin \psi_j - \dot{y}_c - V_{\text{инд}}, \dots, \quad (18)$$

где $V_{\text{инд}}$ — индуктивная скорость.

Отсюда:

$$W^2 = V_{Tj}^2 + V_{pj}^2.$$

Полагая $V_{\text{инд}}$ малой, имеем:

$$W^2 = r^2 \omega^2 + 2r^2 \omega \dot{\varphi} + 2(r - l_2) r \omega \dot{\gamma}_j - 2r \omega (\dot{x}_c + y_0 \dot{\vartheta}) \sin \psi_j - 2r \omega (\dot{z}_c + y_0 \dot{\theta}) \cos \psi_j. \quad (19)$$

Соотношение (14) принимает вид:

$$dT_j = \frac{\rho W^2}{2} b c_y^\alpha \left(\varphi_j + \frac{V_{Tj}}{V_{pj}} \right) dz.$$

Используя (17) — (19), получим:

$$dT_j = \frac{c_y^\alpha b \rho}{2} \{ [r^2 \omega^2 + 2r^2 \omega \dot{\varphi} + 2r(r - l_2) \omega \dot{\gamma}_j - 2r \omega (\dot{y}_0 \dot{\theta} + \dot{z}_c) \cos \psi_j - 2r \omega (\dot{x}_c - y_0 \dot{\vartheta}) \sin \psi_j] \varphi_j - r^2 \omega \dot{\beta}_j - r^2 \omega \dot{\vartheta} \cos \psi_j - r^2 \omega \dot{\theta} \sin \psi_j - r \omega \dot{y}_c \} dr.$$

Аналогично для dQ_j получим:

$$dQ_j = \frac{\rho b c_y^\alpha}{2} [-\omega r^2 \dot{\beta}_j - r^2 \omega \dot{\vartheta} \cos \psi_j - r^2 \omega \dot{\theta} \sin \psi_j - r \omega \dot{y}_c] \varphi_j + \frac{\rho b c_{xp}}{2} [r^2 \omega^2 + 2r^2 \omega \dot{\varphi} + 2r^2 \omega \dot{\gamma}_j - 2r \omega (\dot{x}_c + y_0 \dot{\vartheta}) \sin \psi_j - 2r \omega (\dot{z}_c + y_0 \dot{\theta}) \cos \psi_j].$$

Момент от аэродинамической нагрузки на j -ю лопасть относительно оси горизонтального шарнира будет равен:

$$M_{Tj} = \int_{l_0}^R r dT_j = \{ A [\omega^2 + 2\dot{\varphi} \omega + 2\dot{\gamma}_j \omega] - 2B \omega [(\dot{y}_0 \dot{\theta} + \dot{z}_c) \cos \psi_j + (\dot{x}_c - y_0 \dot{\vartheta}) \sin \psi_j] \} \varphi_j - A \omega (\dot{\beta}_j + \dot{\vartheta} \cos \psi_j + \dot{\theta} \sin \psi_j) - B \omega \dot{y}_c, \quad (20)$$

где

$$A = \frac{c_y^\alpha \rho}{2} \int_{l_0}^R r^3 b dr; \quad B = \frac{c_{xp}^\alpha \rho}{2} \int_{l_0}^R r^2 b dr,$$

l_0 — расстояние от центра втулки до несущей поверхности винта,
 φ_j — угол между аэродинамической хордой и плоскостью вращения, взятый в каком-либо характерном сечении лопасти, например, $0,75R$, в случае, если лопасть обладает естественной кривизной.

Как известно [3],

$$\varphi_j = \varphi_{\text{уст}} - \bar{k} \beta_j - \Delta \varphi_{\text{а.п}},$$

где $\bar{k}$ — характеристика регулятора взмаха,

$\Delta \varphi_{\text{а.п}}$ — угол, определяемый наклоном кольца автомата перекоса, равный

$$\Delta \varphi_{\text{а.п}} = \varphi_{\text{ш}} - \varphi_x \cos \psi_j - \varphi_z \sin \psi_j;$$

здесь $\varphi_{\text{ш}}$ — угол общего шага; φ_x и φ_z определяют наклон кольца автомата перекоса.

В дальнейшем будем предполагать, что кольцо автомата перекоса находится в нейтральном положении — $\Delta \varphi_{\text{а.п}} = 0$.

Момент относительно вертикального шарнира от аэродинамической нагрузки на j -ю лопасть при малом l_2 с достаточной точностью может быть записан в виде:

$$M_{vj} = - \int_{l_0}^R r dQ_j = A \{ \omega \dot{\beta}_j + \omega \dot{\theta} \cos \psi_j + \omega \dot{\theta} \sin \psi_j \} \varphi_{уст} + B \dot{y}_c \varphi_{уст} - \\ - A' \{ \omega^2 + 2\omega \dot{\psi} + 2\omega \dot{\gamma}_j \} + B' \{ 2\omega (\dot{x}_c - y_0 \dot{\theta}) \sin \psi_j - 2\omega (\dot{z}_c + y_0 \dot{\theta}) \cos \psi_j \}, \quad (21)$$

где

$$A' = \frac{\rho}{2} \int_{l_0}^R c_{xp} b r^3 dr; \quad B' = \frac{\rho}{2} \int_{l_0}^R c_{xp} b r^2 dr.$$

Учитывая (20) и (21), можно написать выражения для $Q_{\gamma j}$ и $Q_{\beta j}$ в виде:

$$Q_{\gamma j} = -k_2 \dot{\gamma}_j + A \{ \omega \dot{\beta}_j + \omega \dot{\theta} \cos \psi_j + \omega \dot{\theta} \sin \psi_j \} \varphi_{уст} + B \omega \dot{y}_c \varphi_{уст} - \\ - 2\omega A' (\dot{\psi} + \dot{\gamma}_j) + 2\omega B' [(\dot{x}_c - y_0 \dot{\theta}) \sin \psi_j - (\dot{z}_c + y_0 \dot{\theta}) \cos \psi_j]; \quad (22)$$

$$Q_{\beta j} = \{ 2\omega A (\dot{\psi} + \dot{\gamma}_j) - 2\omega B [(\dot{z}_c + y_0 \dot{\theta}) \cos \psi_j + (\dot{x}_c - y_0 \dot{\theta}) \sin \psi_j] \} \varphi_{уст} - \\ - A \omega \{ \dot{\beta}_j + \dot{\theta} \cos \psi_j + \dot{\theta} \sin \psi_j \} = A \bar{k} \omega^2 \beta_j - B \omega \dot{y}_c; \quad (23)$$

$j = 1, 2, \dots, k.$

На корпус вертолета действуют обобщенные силы от несущего винта:

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{II} &= - \sum_{j=1}^k \int_{l_0}^R dT_j \beta_j \cos \psi_j; & Q_y^{II} &= \sum_{j=1}^k \int_{l_0}^R dT_j; \\ Q_z^{II} &= \sum_{j=1}^k \int_{l_0}^R dT_j \beta_j \sin \psi_j; & Q_{\dot{\theta}}^{II} &= -y_0 Q_x^{II}; \\ Q_{\dot{\psi}}^{II} &= - \sum_{j=1}^k \int_{l_0}^R r dQ_j; & Q_{\dot{\theta}}^{II} &= y_0 Q_z^{II}; \\ & & & j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

При тяге несущего винта, равной нулю, $\varphi_{уст} = 0$. В этом случае выражения для обобщенных сил (22), (23) и (24) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\gamma j} &= -k_2 \dot{\gamma}_j - 2\omega A' (\dot{\psi} + \dot{\gamma}_j) + 2\omega B' [(\dot{x}_c - y_0 \dot{\theta}) \sin \psi_j - \\ &\quad - (\dot{z}_c + y_0 \dot{\theta}) \cos \psi_j], \\ Q_{\beta j} &= -A \omega (\dot{\beta}_j + \dot{\theta} \cos \psi_j + \dot{\theta} \sin \psi_j) - A \bar{k} \omega^2 \beta_j - B \omega \dot{y}_c; \\ Q_{\tau}^{II} &= 0; \\ Q_y^{II} &= -B (\bar{k} \omega^2 \sum_{j=1}^k \beta_j + \omega \sum_{j=1}^k \beta_j) - C \omega k \dot{y}_c; \\ Q_z^{II} &= 0; & Q_{\dot{\theta}}^{II} &= 0; \\ Q_{\dot{\psi}}^{II} &= -2\omega A' (k \dot{\psi} + \sum_{j=1}^k \dot{\gamma}_j); & Q_{\dot{\theta}}^{II} &= 0; \\ & & & j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где

$$C = \frac{c_y^a \rho}{2} \int_{l_0}^R r b dr.$$

§ 5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЕРТОЛЕТА

Используя соотношения (10) — (12) и (25), получим следующие уравнения движения вертолета:

$$\begin{aligned}
 (m_\phi + km_n) \ddot{x}_c - km_n y_0 \ddot{\theta} - S \left[\sum_{j=1}^k (\ddot{\gamma}_j - \omega^2 \gamma_j) \sin \psi_j + 2\omega \dot{\gamma}_j \cos \psi_j \right] &= 0; \\
 (m_\phi + km_n) \ddot{y}_c + S \sum_{j=1}^k \ddot{\beta}_j + (2c_{3y} + c_{ny}) y_c + (c_{ny} x_n - 2c_{3y} x_3) \dot{\theta} + \\
 + (2k_{3y} + k_{ny}) \dot{y}_c + (k_{ny} x_n - 2k_{3y} x_3) \dot{\theta} + B \left(\omega^2 \bar{k} \sum_{j=1}^k \beta_j + \omega \sum_{j=1}^k \dot{\beta}_j \right) + \\
 + C \omega k \dot{y}_c &= 0; \\
 (m_\phi + km_n) \ddot{z}_c + km_n y_0 \ddot{\theta} - S \left(\sum_{j=1}^k (\ddot{\gamma}_j - \omega^2 \gamma_j) \cos \psi_j - 2\omega \dot{\gamma}_j \sin \psi_j \right) + \\
 + (2c_{3z} + c_{nz}) z_c - (2c_{3z} y_{\text{ш}} + c_{nz} y_{\text{ш}}) \dot{\theta} + (2c_{3z} x_3 - c_{nz} x_n) \dot{\psi}_j + \\
 + (2k_{3z} + k_{nz}) \dot{z}_c - (2k_{3z} y_{\text{ш}} + k_{nz} y_{\text{ш}}) \dot{\theta} + (2k_{3z} x_3 - k_{nz} x_n) \dot{\psi} &= 0; \\
 (I_y + kI) \ddot{\psi} - I_{xy} \ddot{\theta} + I_1 \sum_{j=1}^k \ddot{\gamma}_j + (2c_{3z} x_3^2 + c_{nz} x_n^2) \dot{\psi}_j - \\
 - (c_{nz} x_n - 2c_{3z} x_3) z_c + (2k_{3z} x_3^2 + k_{nz} x_n^2) \dot{\psi}_j - (k_{nz} x_n - 2k_{3z} x_3) \dot{z}_c - \\
 - k_2 \sum_{j=1}^k \dot{\gamma}_j + 2\omega A' (k\dot{\psi} + \sum_{j=1}^k \dot{\gamma}_j) &= 0; \\
 \left(I_x + km_n y_0^2 + \frac{k}{2} I \right) \ddot{\theta} + km_n y_0 \ddot{z}_c - I_{xy} \ddot{\psi} - I\omega k \dot{\theta} + \\
 + I \sum_{j=1}^k (\ddot{\beta}_j + \omega^2 \beta_j) \sin \psi_j - y_0 S \left[\sum_{j=1}^k (\ddot{\gamma}_j - \omega^2 \gamma_j) \cos \psi_j - 2\omega \dot{\gamma}_j \sin \psi_j \right] + \\
 + (2c_{3y} z_3^2 + 2c_{3z} y_{\text{ш}}^2 + c_{nz} y_{\text{ш}}^2) \dot{\theta} - (2c_{3z} y_{\text{ш}} + c_{nz} y_{\text{ш}}) z_c + \\
 + (2k_{3y} z_3^2 + 2k_{3z} y_{\text{ш}}^2 + k_{nz} y_{\text{ш}}^2) \dot{\theta} - (2k_{3z} y_{\text{ш}} + k_{nz} y_{\text{ш}}) \dot{z}_c &= 0; \\
 \left(I_z + km_n y_0^2 + \frac{k}{2} I \right) \ddot{\theta} - km_n y_0 \ddot{x}_c + I\omega k \dot{\theta} + I \sum_{j=1}^k (\ddot{\beta}_j + \omega^2 \beta_j) \cos \psi_j + \\
 + y_0 S \left[\sum_{j=1}^k (\ddot{\gamma}_j - \omega^2 \gamma_j) \sin \psi_j + 2\omega \dot{\gamma}_j \cos \psi_j \right] + (2c_{3y} x_3^2 + c_{ny} x_n^2) \dot{\theta} + \\
 + (2k_{3y} x_3^2 + k_{ny} x_n^2) \dot{\theta} &= 0; \\
 I_2 \ddot{\gamma}_j + I_1 \ddot{\psi} + \omega^2 (I_1 - I_2) \gamma_j - S (y_0 \ddot{\theta} + \ddot{z}_c) \cos \psi_j - S (\ddot{x}_c - y_0 \ddot{\theta}) \sin \psi_j + \\
 + k_2 \dot{\gamma}_j + 2\omega A' (\dot{\psi} + \dot{\gamma}_j) - 2\omega B' [(\dot{x}_c - y_0 \dot{\theta}) \sin \psi_j - (\dot{z}_c + y_0 \dot{\theta}) \cos \psi_j] &= 0; \\
 I \ddot{\beta}_j + I\omega^2 \beta_j + I\ddot{\theta} \cos \psi_j + I\dot{\theta} \sin \psi_j - 2I\omega \dot{\theta} \sin \psi_j + 2I\omega \dot{\theta} \cos \psi_j + \\
 + A\omega \{\dot{\beta} + \dot{\theta} \cos \psi_j + \dot{\theta} \sin \psi_j\} + A\bar{k} \omega^2 \beta_j + B\omega \dot{y}_c &= 0; \\
 j = 1, 2, \dots, k.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Анализ устойчивости движения, описываемого системой уравнений (26), ввиду сложности этой системы затруднителен. Для исследования земного резонанса вертолета с учетом махового движения лопастей и оценки влияния этого движения на границы области неустойчивости и потребное демпфирование нет необходимости рассматривать полностью

систему уравнений (26). Для этого достаточно исследовать устойчивость движения, описываемого системой последних $2 + 2k$ уравнений, положив $x_c = y_c = z_c = \psi = 0$. Выбор этих уравнений не случаен, так как именно продольные и боковые колебания вертолета относительно центра тяжести оказывают наибольшее влияние на маховое движение лопастей. Кроме того, будем пренебрегать аэродинамическим сопротивлением лопасти, положив $A' = B' = 0$, так как параметрами, определяющими движение лопасти относительно вертикального шарнира, являются инерционные нагрузки на лопасть и демпфирование в вертикальном шарнире. Если еще уменьшить число степеней свободы вертолета, положив $\vartheta = 0$, и предположить, что диск несущего винта не поворачивается при боковых колебаниях корпуса, что имеет место при

$$\beta_j = -\vartheta \sin \psi_j, \quad (27)$$

то исходная система уравнений сведется к хорошо изученной системе дифференциальных уравнений, описывающих земной резонанс вертолета с одной степенью свободы корпуса [1]. В этом легко убедиться, подставив соотношение (27) в соответствующие уравнения.

§ 6. ЗЕМНОЙ РЕЗОНАНС ВЕРТОЛЕТА С УЧЕТОМ МАХОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЛОПАСТЕЙ

В последних $2 + 2k$ уравнениях перейдем к новым координатам, которые связаны с прежними следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sum_{j=1}^k \gamma_j \sin \psi_j; & \xi &= \sum_{j=1}^k \gamma_j \cos \psi_j; & \alpha &= \sum_{j=1}^k \beta_j \cos \psi_j; & x &= \sum_{j=1}^k \beta_j \sin \psi_j. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Эти соотношения позволяют свести систему $2 + 2k$ уравнений к системе шести уравнений с постоянными коэффициентами. Новые координаты имеют простой геометрический смысл. Координаты η и ξ характеризуют асимметрию расположения лопастей в плоскости вращения, а координаты α и x — положение так называемой оси конуса лопастей в координатной системе $Oxuz$ (см. фиг. 2).

В принятых обозначениях с учетом соотношений (28) и после придания к безразмерному виду с помощью подстановки $t' = \omega t$ система последних $2 + 2k$ уравнений принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vartheta} + 2\bar{n}_0 \dot{\vartheta} + \bar{p}_0^2 \vartheta - 2\mu_0 k \dot{\vartheta} + 2\mu_0 (\ddot{x} - 2\dot{\alpha}) - \varepsilon_1 \xi &= 0; \\ \ddot{\vartheta} + 2\bar{n}_0 \dot{\vartheta} + \bar{p}_0^2 \vartheta + 2\mu_0 k \dot{\vartheta} + 2\mu_0 (\ddot{x} + 2\dot{\alpha}) + \varepsilon_1 \ddot{\eta} &= 0; \\ \ddot{\eta} + 2\bar{n}_2 \dot{\eta} - (1 - \nu_0^2) \eta - 2\xi - 2\bar{n}_2 \xi + \varepsilon_2 y_0 \ddot{\vartheta} &= 0; \\ \ddot{\xi} + 2\bar{n}_2 \dot{\xi} - (1 - \nu_0^2) \xi + 2\dot{\eta} + 2n_2 \eta - \varepsilon_2 y_0 \ddot{\vartheta} &= 0; \\ \ddot{x} + \frac{\gamma}{4} \dot{x} + \frac{\gamma}{4} kx - 2\dot{\alpha} - \frac{\gamma}{4} \alpha + \frac{k}{2} \ddot{\vartheta} + \frac{k}{2} \frac{\gamma}{4} \dot{\vartheta} - k\dot{\vartheta} &= 0; \\ \ddot{\alpha} + \frac{\gamma}{4} \dot{\alpha} + \frac{\gamma}{4} k\alpha + 2\dot{x} + \frac{\gamma}{4} x + \frac{k}{2} \ddot{\vartheta} + \frac{k}{2} \frac{\gamma}{4} \dot{\vartheta} + k\dot{\vartheta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$2n_0 = \frac{2n_0}{\omega}; \quad \bar{p}_0^2 = \left(\frac{p_0}{\omega} \right)^2; \quad 2\bar{n}_0 = \frac{2n_0}{\omega}; \quad \bar{p}_0^2 = \left(\frac{p_0}{\omega} \right)^2; \quad 2\bar{n}_2 = \frac{2n_2}{\omega}.$$

Анализ устойчивости движения, описываемого этой системой уравнений, проводился с помощью электронной модели. Блок-схема для этой системы уравнений приведена ниже на фиг. 5. В этом анализе в



качестве исходных были взяты следующие значения параметров: $k = 4$; $k = 0,4$; $\frac{\gamma}{4} = 1,25$; $\nu_0 = 0,25$. Значения остальных параметров приводятся отдельно для каждого рассматриваемого случая.

Влияние махового движения лопастей на устойчивость движения вертолета на земле исследовалось в следующей последовательности:

1. Изучалась устойчивость движения гипотетического вертолета, у которого отсутствует поворот лопастей относительно вертикальных шарниров — $\eta = \xi = 0$.

2. Исследовалось влияние махового движения лопастей на потребное демпфирование в амортизационных стойках и в демпферах в вертикальных шарнирах при отсутствии продольных колебаний корпуса вертолета — $\vartheta = 0$.

3. Исследовалось влияние махового движения лопастей на потребное демпфирование при наличии продольных и боковых колебаний корпуса.

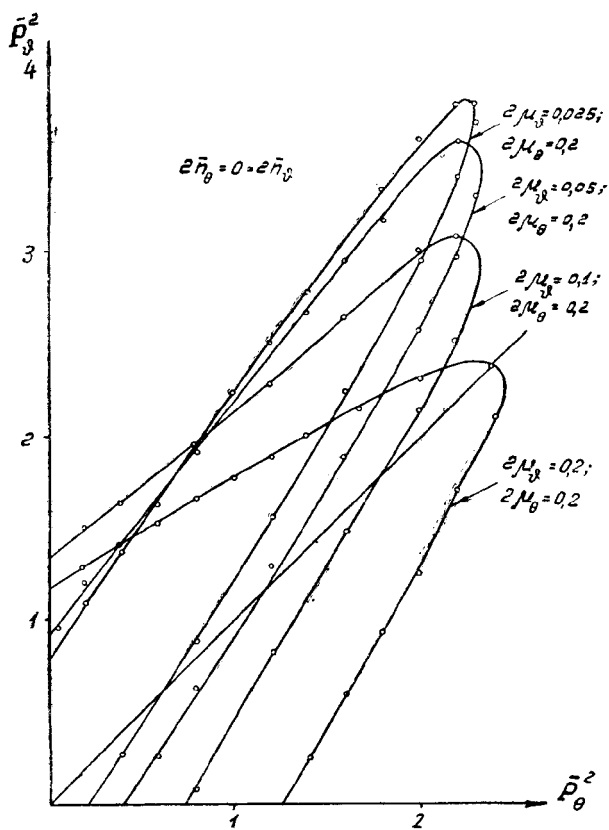
В первом случае система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + 2\bar{n}_0 \dot{\theta} + \bar{p}_0^2 \theta - 2\mu_0 k \dot{\vartheta} + 2\mu_0 (\ddot{x} - 2\ddot{\alpha}) &= 0; \\ \ddot{\vartheta} + 2\bar{n}_0 \dot{\vartheta} + \bar{p}_0^2 \vartheta + 2\mu_0 k \dot{\theta} + 2\mu_0 (\ddot{\alpha} + 2\ddot{x}) &= 0; \\ \ddot{x} + \frac{\gamma}{4} \dot{x} + \bar{k} \frac{\gamma}{4} x - 2\ddot{\alpha} - \frac{\gamma}{4} \alpha + \frac{k}{2} \ddot{\theta} + \frac{k}{2} \frac{\gamma}{4} \dot{\theta} - k \dot{\vartheta} &= 0; \\ \ddot{\alpha} + \frac{\gamma}{4} \dot{\alpha} + \bar{k} \frac{\gamma}{4} \alpha + 2\ddot{x} + \frac{\gamma}{4} x + \frac{k}{2} \ddot{\vartheta} + \frac{k}{2} \frac{\gamma}{4} \dot{\vartheta} + k \dot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$

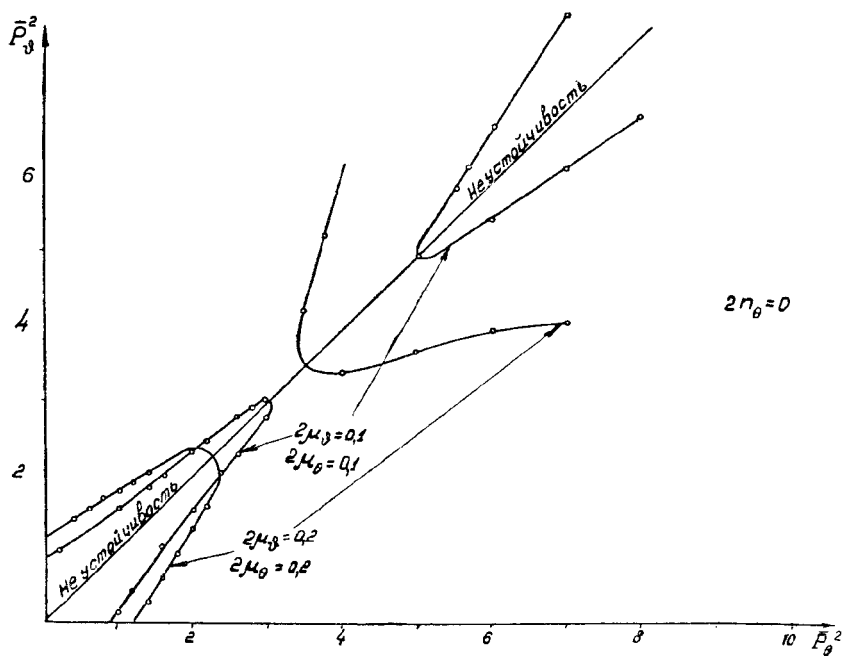
Исследования показали, что при некоторых значениях параметров $2\bar{n}_0$, $2\bar{n}_0$, $2\mu_0$, $2\mu_0$; $\bar{p}_0$ и p_0 колебания вертолета нарастают, причем колебания лопастей носят характер, известный в теории флаттера несущего винта под названием бегущей волны. На границе области неустойчивости, где колебания являются установившимися, ось конуса лопастей и ось вращения винта движутся по коническим поверхностям. Замкнутые кривые, получающиеся в результате пересечения этих поверхностей плоскостями, параллельными плоскости вращения несущего винта и плоскости земли, являются эллипсами, форма которых зависит от вышеуказанных параметров. На фиг. 6 показано расположение областей неустойчивости (внутри кривых) в плоскости квадратов приведенных частот $\bar{p}_0^2$ и p_0^2 в зависимости от параметра $2\mu_0$ при $2\bar{n}_0 = 2\bar{n}_0 = 0$ и $2\mu_0 = 0,2$. Наибольшей ширины область неустойчивости достигает при равных моментах инерции $I_x = I_z$. Если увеличивать I_z , то область неустойчивости сужается и поворачивается в сторону оси $\bar{p}_0^2$. Каждой показанной на этом графике области неустойчивости при больших значениях параметров $\bar{p}_0^2$ и p_0^2 соответствует еще одна область неустойчивости, которая здесь не приводится.

Для двух значений параметров $2\mu_0 = 2\mu_0 = 0,2$ и $2\mu_0 = 2\mu_0 = 0,1$ на фиг. 7 показаны области неустойчивости в плоскости параметров p_0^2 и $\bar{p}_0^2$ при $2\bar{n}_0 = 2\bar{n}_0 = 0$ (случай равных моментов инерции $I_x = I_z$). Как показал расчет, чем меньше отношение момента инерции лопасти к моменту инерции корпуса вертолета в этом случае, тем уже область неустойчивости, тем меньше демпфирование в амортизационных стойках, необходимое для устранения этой неустойчивости.

Зависимость границы области неустойчивости в плоскости параметров $2\bar{n}_0$ и $2\bar{n}_0$ от параметра $\bar{p}_0 = p_0$ ($2\mu_0 = 2\mu_0 = 0,2$) приводится на фиг. 8. Рассматривая этот график, можно сделать вывод, что для данной величины $2\mu_0 = 2\mu_0 = 0,2$ существует область значений параметров $2\bar{n}_0$ и $2\bar{n}_0$,

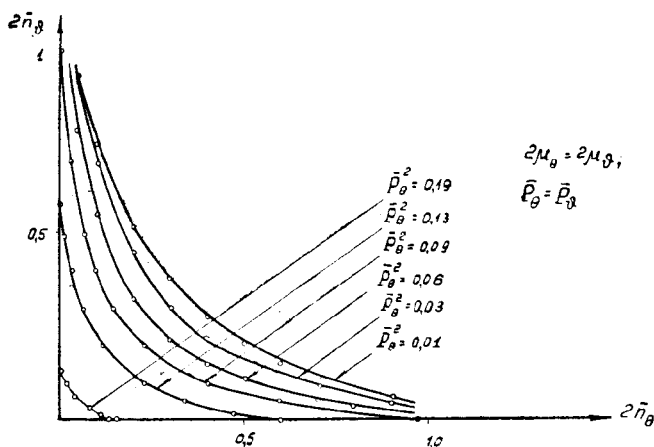


Фиг. 6

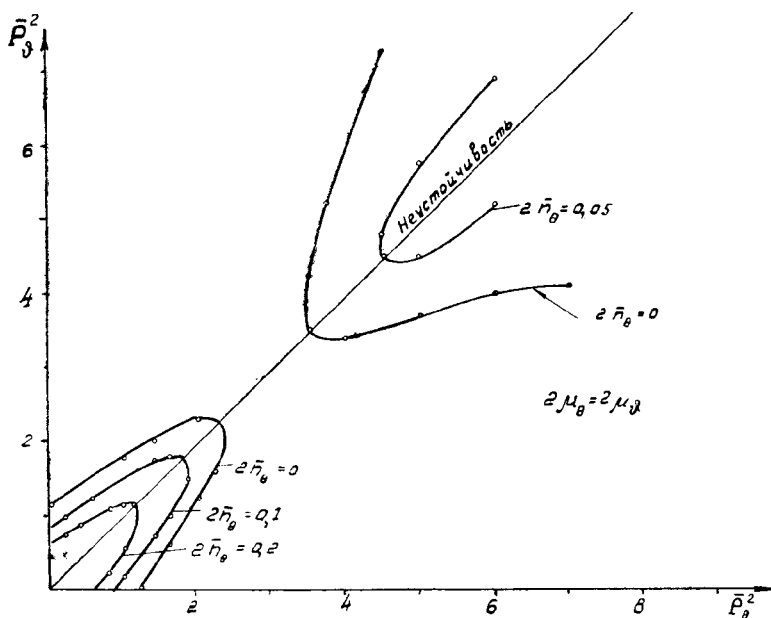


Фиг. 7

при которых указанная выше неустойчивость невозможна при любых значениях параметра $\bar{p}_\theta^2$. На фиг. 9 приводится расположение областей неустойчивости в зависимости от параметра $2\bar{n}_\theta = 2n_\theta$ при $2\mu_\theta = 2\mu_\theta = 0,2$. Из графика следует, что область неустойчивости, соответствующая большим значениям параметров $\bar{p}_\theta^2$ и $\bar{p}_\theta^2$, является областью слабой колебательной неустойчивости, легко устранимой сравнительно небольшим



Фиг. 8

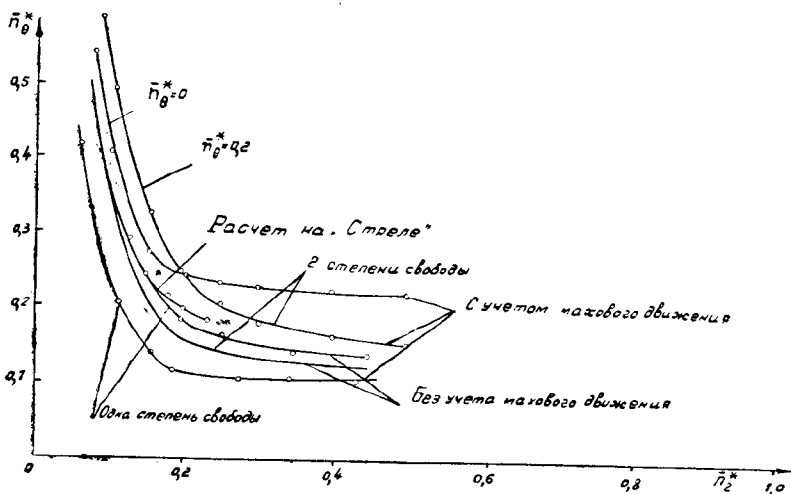


Фиг. 9

демпфированием. Кроме того, эта область соответствует также значениям параметров $\bar{p}_\theta^2$; $\bar{p}_\theta^2$; $2\mu_\theta$ и $2\mu_\theta$, которые у реальных вертолетов обычно не встречаются.

Если соотношения между величинами I_x ; I_z ; p_θ и p_θ таковы, что колебаниями относительно поперечной оси вертолета можно пренебречь ($\theta = 0$), то будем иметь второй случай. На фиг. 10 приводятся кривые потребного демпфирования, т. е. такого демпфирования в амортизации

онных стойках и в демпферах в вертикальных шарнирах, которое необходимо для полного устранения колебательной неустойчивости во всем диапазоне чисел оборотов от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Нижняя кривая соответствует рассматриваемому случаю. Для сравнения приводится аналогичная кривая (третья снизу), полученная расчетом на электронной моделирующей машине по обычной методике [1] (без учета махового движения лопастей), а также кривая, полученная по той же методике на быстро-



Фиг. 10

действующей вычислительной машине „Стрела“. На этом графике

$$\bar{n}_\theta^* = \frac{n_\theta}{p_0}; \quad \bar{n}_\psi^* = \frac{n_\psi}{p_0}; \quad \bar{n}_2^* = \frac{n_2}{p_0}; \quad \epsilon^* = \frac{S^2 y_0^2 k}{2(I_x + km_{\text{л}} y_0^2) I_2}, \quad \text{где } p_0 = \sqrt{\frac{2c_{3y} z_3^2 + 2c_{3z} y_{\text{ш}}^2}{I_x + km_{\text{л}} y_0^2}} \text{ — собственная частота колебаний корпуса вер-$$

толета относительно центра тяжести с массой лопастей, сосредоточенной в центре втулки несущего винта. Переход от параметров $2n_\theta$, $2n_\psi$, $2n_2$ и ϵ к этим параметрам, которые применяются в обычной теории земного резонанса вертолета, сравнительно прост и на нем останавливаться не будем. В расчетах принимались следующие значения параметров: $\epsilon^* = 0,1$, $2\mu_\theta = 0,2$; $p_0 = 22,8$ 1/сек.

Рассматривая эти кривые, можно сделать вывод, что точность вычислений на моделирующей машине не превышала 8—10% и что учет махового движения лопастей в этом случае приводит к существенному уменьшению требуемого демпфирования. На практике, однако, этот предельный случай не встречается, поэтому необходимо исследовать, как влияет маховое движение лопастей на требуемое демпфирование при некоторых реальных значениях I_x , I_2 , p_θ и p_ψ .

На третьем этапе исследовалось движение, описываемое системой дифференциальных уравнений (29), при следующих значениях параметров: $\epsilon^* = 0,1$; $2\mu_\theta = 0,1$; $2\mu_\psi = 0,2$; $p_\theta = 17,4$; $p_\psi = 6,04$.

На фиг. 10 приводятся кривые требуемого демпфирования для двух значений параметра: $\bar{n}_\theta^* = 0$ и $\bar{n}_\theta^* = 0,2$. Из графиков видно, что в этом случае требуемое демпфирование значительно превышает то, которое получается при расчетах по методике, приведенной в [1]. Чтобы выяснить, какое влияние оказывает на величину требуемого демпфирования учет второй степени свободы корпуса, был проведен расчет земного

резонанса вертолета без учета махового движения лопастей, который показал, что требуемое демпфирование в этом случае мало отличается от требуемого демпфирования, полученного по методике, приведенной в [1] (вторая кривая снизу на фиг. 10).

При практических расчетах требуемого демпфирования для устранения земного резонанса вертолета можно пользоваться методикой, приведенной в [1], если область неустойчивости для этого вертолета, определяемая маховым движением лопастей, лежит выше рабочих чисел оборотов несущего винта. Если при существующих значениях параметров μ_0 ; ρ_0 ; $2\mu_0$; $2\rho_0$ рабочие числа оборотов несущего винта таковы, что вертолет попадает в эту область неустойчивости, то расчет требуемого демпфирования следует проводить, анализируя устойчивость движения, описываемого системой дифференциальных уравнений (29).

ВЫВОДЫ

Составлены уравнения земного резонанса вертолета на земле с учетом махового движения лопастей. Показано, что существует область чисел оборотов несущего винта, в которой возможен новый, неизвестный ранее, вид колебательной неустойчивости, определяемый наличием горизонтальных шарниров.

Установлено, что эта область чисел оборотов несущего винта зависит от демпфирования в шасси, инерционных характеристик лопастей и корпуса, а также от асимметрии жесткостных и инерционных характеристик в продольной и поперечной плоскостях вертолета.

Показано, что при определении „требуемого“ демпфирования в шасси и вертикальном шарнире, которое необходимо для устранения колебательной неустойчивости типа земной резонанс, в некоторых случаях необходимо учитывать маховое движение лопастей несущего винта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жеребцов Б. Я. Динамическая устойчивость несущего винта геликоптера с учетом упругости его опоры. Труды ЦАГИ, 1949.
 2. Крылов А. Н. Собрание трудов, т. II, Изд. Академии Наук СССР, 1951.
 3. Юрьев Б. Н. Аэродинамический расчет вертолетов. Оборонгиз, 1956.
-

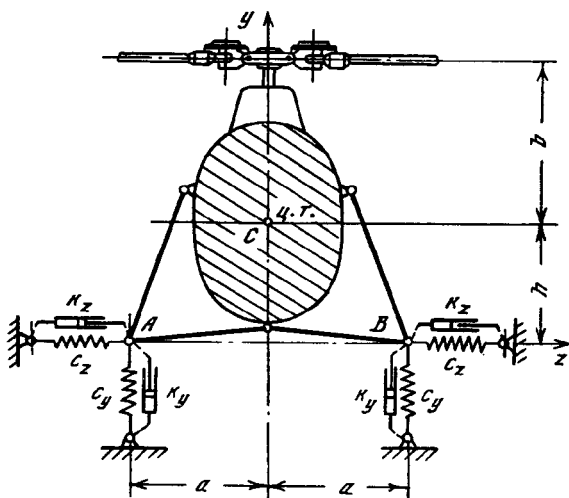
ЗЕМНОЙ РЕЗОНАНС ВЕРТОЛЕТА НА ПРОБЕГЕ

Л. Н. ГРОДКО

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются колебания вертолета типа „земной резонанс“ на пробеге. Показано, что при качении пневматика его боковая жесткость заметно уменьшается. Приведены простые формулы, которые позволяют рассчитывать поперечные колебания вертолета на пробеге с учетом изменения боковой жесткости и демпфирования пневматика при его качении. Рассматривается также влияние на земной резонанс махового движения лопастей с фрикционными демпферами.

При расчете земного резонанса вертолетов наиболее распространенных схем (одновинтовой, продольной) интересуются, как правило, лишь поперечными колебаниями вертолета, так как именно они представляют основную опасность. При этом вертолет рассматривается как твердо



Фиг. 1

тело, укрепленное на вертикальных и горизонтальных пружинах, моделирующих упругость пневматика и амортизаторов шасси (фиг. 1). При расчете обычно предполагается, что вертолет стоит на месте и его пневматики не катятся по земле. Жесткость горизонтальных пружин

претерпевает равной боковой жесткости пневматика. При качении пневматика боковая жесткость уменьшается. Это изменение боковой жесткости может быть без труда рассчитано по существующей теории шимми.

Уменьшение боковой жесткости пневматика приводит к снижению критических чисел оборотов земного резонанса. Если у вертолета имеется зона неустойчивости, расположенная выше рабочих чисел оборотов винта, и запас по числам оборотов винта для стоящего неподвижно вертолета составляет 20—30%, то при пробеге такого вертолета может возникнуть земной резонанс.

Таким образом, критическая угловая скорость несущего винта, при которой начинаются нарастающие колебания вертолета, зависит от скорости движения вертолета по земле, причем чем больше скорость вертолета, тем ниже критическая угловая скорость винта. Можно говорить о критической скорости движения вертолета по земле, при которой начинаются колебания, для данной угловой скорости вращения несущего винта. Понятие критической скорости пробега вертолета является более удобным, так как угловая скорость вращения винта при пробеге изменится в весьма узком диапазоне рабочих чисел оборотов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БОКОВОЙ ЖЕСТКОСТИ И БОКОВОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ПНЕВМАТИКА

Рассмотрим следующую упрощенную задачу. По земле катится колесо с пневматиком. Пусть колесо по каким-то причинам совершает поперечные гармонические колебания так, что ось вращения колеса остается все время параллельной своему начальному положению и расстояние от оси колеса до земли остается неизменным (фиг. 2). Определим переменную боковую силу P_z реакции земли, которая при этом будет приложена к пневматике в точке касания его с землей.

Пусть боковое перемещение z диаметральной плоскости колеса изменяется во времени по закону

$$z = z_0 e^{i\omega t}, \quad (1)$$

где ω и z_0 — постоянные величины.

Пусть λ — боковая деформация пневматика, т. е. расстояние между диаметральной плоскостью колеса и точкой пневматика, которая является центром площадки контакта при отсутствии боковой деформации. Тогда боковая сила P_z будет равна:

$$P_z = c_z \lambda, \quad (2)$$

где c_z — боковая жесткость пневматика при отсутствии качения.

Пользуясь гипотезой качения М. В. Келдыша [2], имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \varphi + \frac{d\lambda}{ds}, \\ \frac{d\varphi}{ds} &= \alpha\lambda - \beta\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где s — путь, отсчитываемый по линии качения,

φ — угловая деформация пневматика; угол между линией пересечения диаметральной плоскости обода колеса с плоскостью земли и касательной к линии, принадлежащей поверхности пневматика, которая представляет собой линию пересечения диаметральной плоскости обода колеса с поверхностью недеформированного пневматика,

α и β — постоянные для данного пневматика величины.

Переходя к производным по времени t , получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= V\varphi + \dot{\lambda}, \\ \dot{\varphi} &= V(\alpha\lambda - \beta\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где V — скорость качения пневматика.

Полагая

$$\lambda = \lambda_0 e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}, \quad (5)$$

получим следующие уравнения для определения λ_0 и φ_0 :

$$\begin{aligned} V\varphi_0 + i\omega\lambda_0 &= i\omega z_0, \\ (i\omega + \beta V)\varphi_0 - \alpha V\lambda_0 &= 0. \end{aligned}$$

Определим отсюда λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{i\omega z_0}{i\omega + \frac{\alpha V^2}{i\omega + \beta V}}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и (5) в (2), получаем следующее выражение для боковой силы:

$$P_z = P_0 e^{i\omega t}, \quad (7)$$

где

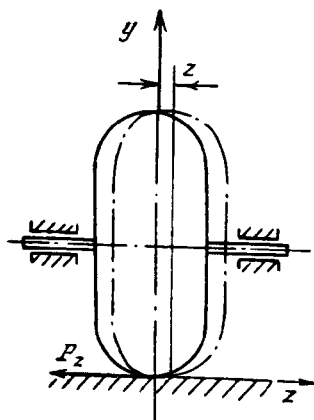
$$P_0 = \frac{i\omega c_z}{i\omega + \frac{\alpha V^2}{i\omega + \beta V}} z_0.$$

Назовем динамической боковой жесткостью пневматика величину

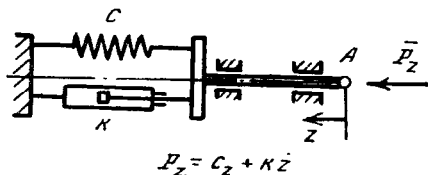
$$D(\omega) = \frac{P_0}{z_0} = c_z \frac{i\omega}{i\omega + \frac{\alpha V^2}{i\omega + \beta V}}. \quad (8)$$

Динамическая жесткость, как это видно из последнего выражения, является комплексной величиной. Модуль $D(\omega)$ представляет собой отношение амплитуды $|P_0|$ боковой силы к амплитуде колебаний $|z_0|$ диаметральной плоскости колеса. Аргумент динамической жесткости $D(\omega)$ представляет собой фазу колебаний силы по отношению к колебаниям смещения z .

Рассмотрим некоторый элемент (фиг. 3), в котором параллельно соединены пружина и демпфер с линейными характеристиками. При



Фиг. 2



$$P_z = C z + K \dot{z}$$

Фиг. 3

приложении к такому элементу силы P_z точка A начнет двигаться, причем ее координата z будет связана с силой соотношением

$$P_z = c z + k \dot{z}, \quad (9)$$

где c — жесткость пружины,
 k — коэффициент демпфера.

Если точка A совершает гармонические колебания по закону $z = z_0 e^{i\omega t}$, сила будет изменяться по закону

$$P_z = (c + i\omega k) z_0 e^{i\omega t}$$

$$P_z = P_0 e^{i\omega t}; \quad P_0 = (c + i\omega k) z_0.$$

Величину

$$D(\omega) = c + i\omega k \quad (10)$$

назовем динамической жесткостью элемента, состоящего из пружины и демпфера. Из выражения (10) видно, что вещественная часть динамической жесткости представляет собой жесткость пружины, а мнимая часть — коэффициент демпфера, умноженный на $i\omega$.

Для того, чтобы производить расчет на земной резонанс вертолета в соответствии со схемой фиг. 1, нужно так подбирать жесткости боковых пружин и коэффициенты боковых демпферов, чтобы соответствующая динамическая жесткость была равна боковой динамической жесткости пневматика (8). Отделяя в выражении (8) вещественную и мнимую части, получим следующие выражения для жесткости и демпфирования эквивалентных боковых пружин и демпфера:

$$c_{\text{экв}} = c_z \frac{\left(1 - \frac{\alpha V^2}{\omega^2}\right) + \frac{\beta^2 V^2}{\omega^2}}{\left(1 - \frac{\alpha V^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\beta^2 V^2}{\omega^2}}, \quad (11)$$

$$k_{\text{экв}} = \frac{c_z}{\omega} \frac{\frac{\beta V}{\omega^2} \frac{\alpha V^2}{\omega^2}}{\left(1 - \frac{\alpha V^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\beta^2 V^2}{\omega^2}}. \quad (12)$$

В изложенном здесь методе замены пневматика пружинами и демпферами все формулы были выведены только для гармонических колебаний. В действительности вертолет может совершать затухающие или нарастающие колебания, которые можно рассматривать лишь как "почти" гармонические. Для строгого решения задачи следовало бы решать уравнения движения вертолета вместе с неавтономными условиями качения (4). Однако предлагаемый метод значительно нагляднее и позволяет использовать обычную схему расчета земного резонанса, вводя в нее уточненные боковую жесткость и демпфирование. Следует отметить, что при расчете вертолета на земной резонанс обычно интересуются границами зон неустойчивости, на которых возникают чисто гармонические колебания вертолета.

Для определения границ устойчивости предлагаемый метод должен давать точные результаты, так же как для определения демпфирования, потребного для исключения неустойчивости.

Формулы для эквивалентных боковой жесткости и демпфирования пневматика могут быть значительно упрощены, если их вывести, пользуясь не гипотезой качения М. В. Келдыша, а так называемой гипотезой увода. По этой гипотезе величина увода или боковая деформация пневматика λ связана с угловой деформацией пневматика φ соотношением

$$\lambda = \eta \varphi, \quad (13)$$

где $\eta = \frac{\beta}{\alpha}$ — так называемый коэффициент увода.

Для любого пневматика можно приближенно считать, что коэффициент увода η равен радиусу r недеформированного пневматика. При такой гипотезе первое из уравнений (4) дает:

$$\dot{z} = \frac{V}{\eta} \lambda + \dot{\lambda}. \quad (14)$$

Полагая, как и раньше, $z = z_0 e^{i\omega t}$; $\lambda = \lambda_0 e^{i\omega t}$; $P = P_0 e^{i\omega t}$, получим:

$$D(\omega) = \frac{P_0}{z_0} = c_z \frac{1 + i \frac{V}{\eta \omega}}{1 + \left(\frac{V}{\eta \omega} \right)^2}. \quad (15)$$

Отделяя в этом выражении вещественную и мнимую части, получим следующие выражения для жесткости и демпфирования эквивалентных боковых пружин и демпферов:

$$c_{\text{экв}} = \frac{c_z}{1 + \left(\frac{V}{\eta \omega} \right)^2}, \quad (16)$$

$$k_{\text{экв}} = \frac{c_z}{\omega} \frac{\frac{V}{\eta \omega}}{1 + \left(\frac{V}{\eta \omega} \right)^2}. \quad (17)$$

Эти выражения проще, чем (11) и (12), и могут быть получены и из них как приближенные для случая, когда величина $\left(\frac{V}{\eta \omega} \right)^2$ велика по сравнению с единицей.

На фиг. 4 представлены графики зависимости боковой жесткости и демпфирования пневматика вертолета Ми-1 от скорости пробега V вертолета. Графики построены для безразмерных коэффициентов жесткости и демпфирования по формулам, полученным при использовании гипотезы М. В. Келдыша и гипотезы увода:

$$\bar{c}_{\text{экв}} = \frac{c_{\text{экв}}}{c_z}; \quad \bar{n} = \frac{k_{\text{экв}} h^2}{I_c \omega}, \quad (18)$$

где I_c — момент инерции вертолета относительно главной продольной оси инерции,

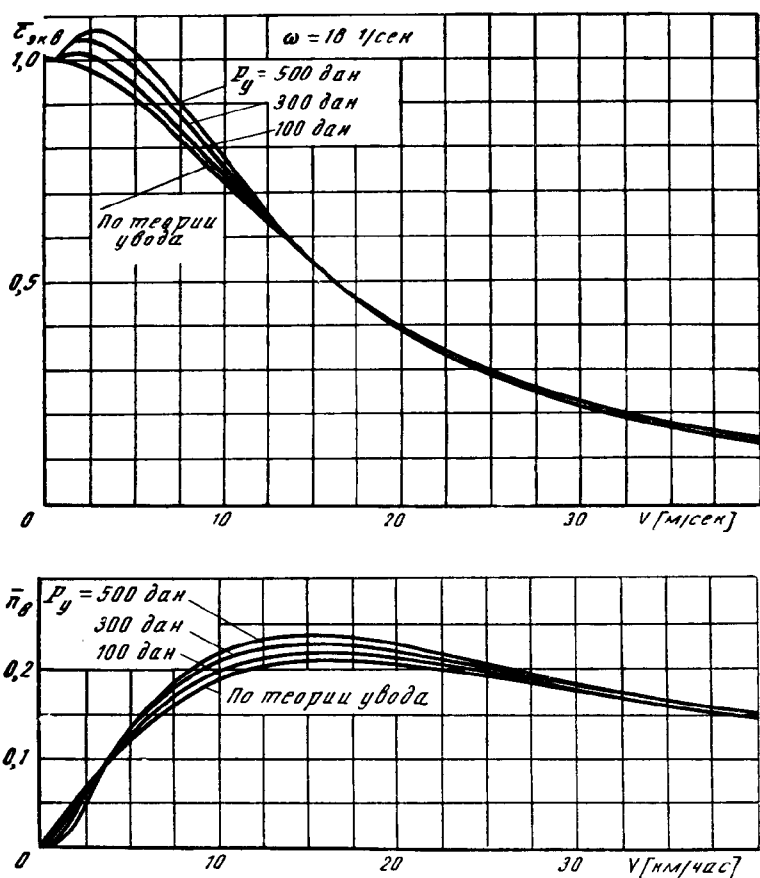
h — расстояние от центра тяжести вертолета до земли.

Формулы, основанные на гипотезе М. В. Келдыша, дают различные значения боковой жесткости и демпфирования в зависимости от вертикальной нагрузки P_v на колесо. Гипотеза увода дает график, не зависящий от нагрузки на колесо. Как видно из сравнения графиков, можно с достаточной для практики степенью точности пользоваться формулами (16) и (17). Это тем более обоснованно, что обе гипотезы качения, как показывают экспериментальные исследования шимми, являются приближенными.

Графики показывают, что при движении вертолета по земле эквивалентная боковая жесткость пневматика быстро уменьшается. Так, при скорости движения 30 км/час боковая жесткость почти в пять раз меньше, чем при скорости, равной нулю. При возрастании V боковая жесткость $c_{\text{экв}}$ стремится к нулю.

Боковое демпфирование пневматика при скорости, равной нулю, отсутствует. Это получается вследствие того, что в нашем расчете

При этом учитывается демпфирование, обусловленное внутренним гистерезисом резины, а вычисляется лишь та часть демпфирования, которая связана с неголономными кинематическими условиями качения пневматика. Опыт показывает, что эта часть бокового демпфирования составляет более половины всего демпфирования пневматика при скорости порядка 10—20 км/час, т. е. когда „кинематическое“ демпфирование



Фиг. 4

максимально. Как видно из графика, коэффициент демпфирования $\eta_{кв}$ сначала возрастает с ростом скорости и достигает максимального значения при скорости 15—17 км/час. При дальнейшем увеличении скорости пробег демпфирование начинает уменьшаться и при бесконечном возрастании скорости стремится к нулю.

РАСЧЕТ САМОВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ВЕРТОЛЕТА НА ПРОБЕГЕ

При расчете самовозбуждающихся колебаний вертолета на пробеге можно поступать следующим образом. Сначала определить частоты и формы поперечных колебаний вертолета в предположении, что демпфирование отсутствует. При этом боковая жесткость пневматиков, следовательно, частоты и формы поперечных колебаний будут зависеть от скорости пробег V . Так как в формулу (16) для определения

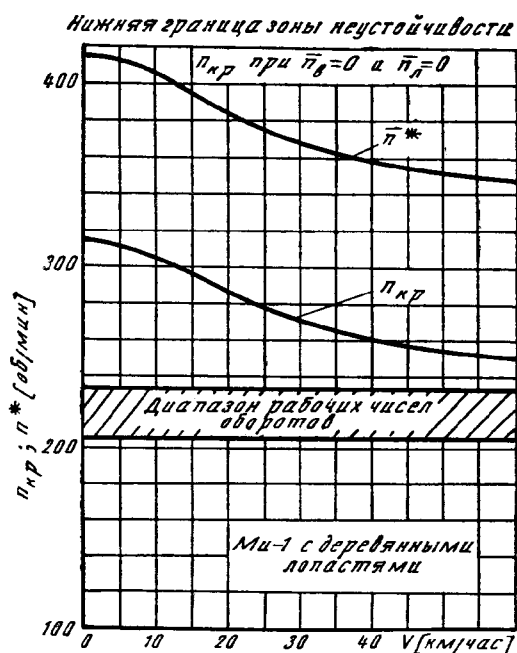
боковой жесткости входит частота колебаний ω , а частота собственных колебаний вертолета p , в свою очередь, зависит от боковой жесткости пневматика, следует поступать так: задаваясь значениями боковой жесткости $c_{\text{экв}}$ в интервале от нуля до c_z , определять собственные частоты p_1 и p_2 первого и второго тонов поперечных колебаний вертолета и соответствующие формы колебаний, а затем по формуле (16) определять соответствующие значения скорости пробега, полагая $\omega = p$.

Таким образом, скорость пробега, соответствующую данной боковой жесткости $c_{\text{экв}}$, следует определять по формуле

$$V = \eta p \sqrt{\frac{c_z}{c_{\text{экв}}} - 1}. \quad (19)$$

В остальном расчет самовозбуждающихся колебаний можно проводить обычным путем.

На фиг. 5 представлен график зависимости угловой скорости вращения винта, соответствующей нижней границе зоны неустойчивости



Фиг. 5

второго тона поперечных колебаний для вертолета Ми-1, от скорости пробега. Границы зоны неустойчивости определялись по графикам Б. Я. Жеребцова [1] для системы без демпфирования, у которой втулка винта может двигаться только в поперечном направлении. Эквивалентные характеристики упругого основания втулки (приведенная масса, жесткость) определялись так, как это указано в работе [3].

Из фиг. 5 видно, что запас устойчивости по числам оборотов несущего винта для Ми-1 существенно снижается с увеличением скорости пробега вертолета. Так, для стоящего неподвижно вертолета запас составляет 36%, а для вертолета, движущегося со скоростью 60 км/час, запас составляет лишь 8%.

Следует указать возможность применения весьма простого метода оценки самовозбуждающихся колебаний вертолета на пробеге.

С ростом скорости пробега боковая жесткость пневматика весьма быстро уменьшается. При этом частота низшего (1-го) тона поперечных колебаний вертолета стремится к нулю, в то время как частота 2-го тона поперечных колебаний стремится к некоторому пределу, соответствующему колебаниям вращения фюзеляжа вокруг главной продольной оси инерции вертолета. Поэтому для приближенного расчета самопобуждающихся колебаний на пробеге можно считать, что фюзеляж вертолета имеет одну степень свободы — угловое перемещение вокруг главной продольной оси инерции. Частота собственных поперечных колебаний вертолета при этом может определяться по формуле

$$p = \sqrt{\frac{2c_y a^2}{I_c}}, \quad (20)$$

где c_y — жесткость вертикальных пружин (см. фиг. 1), упругость которых складывается из вертикальной упругости пневматика и приведенной упругости амортизационной стойки шасси,

I_c — момент инерции вертолета относительно главной продольной оси инерции,

a — половина колеи шасси (см. фиг. 1).

Формула (20) относится к вертолету с трехколесным шасси. Если вертолет имеет четырехколесное шасси, частоту колебаний можно определять по формуле

$$p = \sqrt{\frac{2[c_{1y} a_1^2 + c_{2y} a_2^2]}{I_c}}, \quad (21)$$

где c_{1y} ; c_{2y} ; a_1 и a_2 — жесткости и колея, соответственно, переднего и заднего шасси.

Масса вертолета, приведенная к центру несущего винта, будет в этом случае равна:

$$m_{пр} = \frac{I_c}{b^2}, \quad (22)$$

где b — расстояние от центра несущего винта до центра тяжести вертолета (см. фиг. 1).

Коэффициент демпфирования шасси может быть [см. формулу (18)] определен по формуле

$$\bar{n} = \frac{k_{экр} h^2}{I_c p} + \frac{k_y a^2}{I_c p}, \quad (23)$$

где k_y — коэффициент вертикальных демпферов (см. фиг. 1).

При расчете по этим упрощенным формулам частота собственных колебаний p будет всегда получаться заниженной по сравнению с точным значением частоты 2-го тона поперечных колебаний. Однако эта ошибка невелика. Так, для вертолета Ми-1 частота, рассчитанная по формуле (20), получается равной 250 кол/мин, а частота собственных поперечных колебаний 2-го тона при $V=60$ км/час, определенная по точной формуле, равна 262 кол/мин, причем ошибка получается тем меньше, чем больше скорость пробега.

Так как у вертолетов наиболее распространенных схем зона неустойчивости на пробеге лежит выше рабочих чисел оборотов, то предлагаемый приближенный расчет будет давать ошибку „в запас надежности“.

ВЛИЯНИЕ НА ЗЕМНОЙ РЕЗОНАНС ВЕРТОЛЕТА ПОЛОЖЕНИЯ РУЧКИ УПРАВЛЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИМ ШАГОМ ВИНТА

При экспериментальных исследованиях земного резонанса вертолета с фрикционными демпферами лопастей как у нас, так и за рубежом отмечалось сильное влияние на колебания положения ручки управления циклическим шагом. Если при нейтральном положении ручки колебаний нет, то они могут возникнуть при отклонении ручки от нейтрального положения, причем колебания будут нарастать тем энергичнее, чем больше отклонить ручку. Если быстро убрать ручку в нейтральное положение, колебания прекратятся. Аналогичное явление наблюдалось при экспериментальных исследованиях флаттера несущего винта и было объяснено для этого случая А. В. Некрасовым [4]. Здесь мы разбираем подробно это явление применительно к земному резонансу почти так же, как в [4] для случая флаттера.

При отклонении ручки управления возникает маховое движение лопастей относительно горизонтальных шарниров. При этом возникают кориолисовы силы, заставляющие лопасти совершать колебания в плоскости вращения. От этого начинают работать демпферы вертикальных шарниров лопастей.

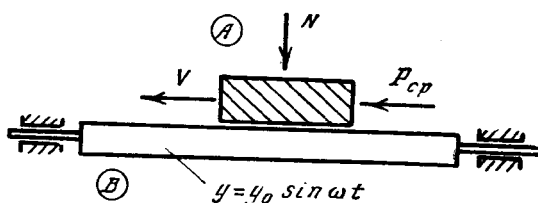
Если лопасти снабжены линейными демпферами, которые создают момент, пропорциональный угловой скорости вращения лопасти относительно вертикального шарнира, то маховое движение лопастей, которое происходит с частотой чисел оборотов винта, не оказывает никакого влияния на демпфирование собственных колебаний лопасти в плоскости вращения, происходящих с значительно более низкой частотой (для большинства вертолетов эта частота в три—четыре раза ниже числа оборотов).

В самом деле, пусть лопасть совершает в плоскости вращения сложное колебательное движение, состоящее из двух гармоник: первой гармоники оборотов винта и гармоники низкой частоты, соответствующей собственным колебаниям лопасти.

Линейный демпфер будет совершать работу на перемещениях соответствующих каждой гармонике независимо. Например, работа, которую будет совершать линейный демпфер на перемещениях, соответствующих собственным колебаниям лопасти, будет зависеть исключительно от амплитуды и частоты этих колебаний и не будет зависеть от амплитуды вынужденных колебаний лопасти по первой гармонике.

Иначе обстоит дело с фрикционным демпфером. Фрикционный демпфер — это существенно нелинейный элемент. Момент фрикционного демпфера при идеальном законе сухого трения не зависит ни от частоты, ни от амплитуды колебаний, а направление его зависит в каждый момент времени от направления угловой скорости вращения лопасти относительно вертикального шарнира. Поэтому, если движение лопасти состоит из двух гармонических составляющих, то работа, совершаемая демпфером на перемещениях, соответствующих одной из этих гармонических составляющих, существенно зависит от амплитуды и частоты другой гармонической составляющей. При собственных колебаниях лопасти в плоскости вращения работа, совершаемая демпфером на перемещениях, соответствующих этим собственным колебаниям, зависит от амплитуды вынужденных колебаний лопасти относительно вертикального шарнира, которая пропорциональна отклонению ручки управления, причем, как это видно из дальнейшего, демпфирование собственных колебаний лопасти будет тем слабее, чем больше амплитуда вынужденных колебаний, т. е. чем больше отклонена ручка управления. Таким образом, отклонение ручки управления циклическим шагом для вертолета с фрикционными демпферами лопастей в известном смысле эквивалентно уменьшению демпфирования лопастей.

Для того, чтобы подробнее разобрать это явление, рассмотрим следующую идеализированную схему (фиг. 6). Пусть тело A движется равномерно со скоростью V влево и скользит при этом по плите B , которая совершает колебания в горизонтальном направлении около



Фиг. 6

некоторого среднего положения. Пусть эти колебания гармонические и происходят по закону

$$y = y_0 \sin \omega t, \quad (24)$$

где y_0 и ω — амплитуда и частота колебаний плиты B .

Тело A прижато к колеблющейся плите B некоторой нормальной силой N . Будем считать, что трение между поверхностью тела A и плитой B соответствует идеальному закону сухого трения, т. е. сила трения по величине постоянна и равна

$$P_0 = \mu N, \quad (25)$$

где μ — коэффициент трения скольжения.

Направление силы трения зависит от направления скорости тела A относительно плиты B .

Будем считать силу трения P , приложенную к телу A , положительной, если она направлена на фиг. 6 вправо. Смещение y плиты B будем считать положительным, если оно направлено влево на фиг. 6. Тогда закон трения можно записать так:

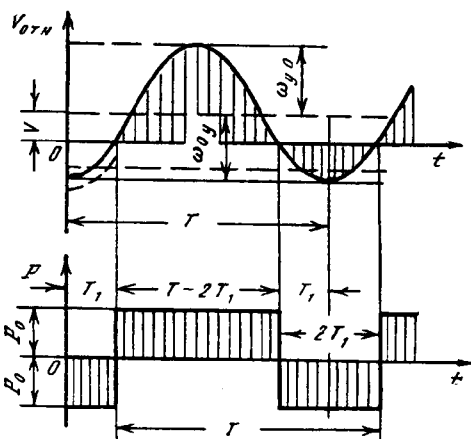
$$P = \begin{cases} +P_0 & \text{при } V > \dot{y}, \\ -P_0 & \text{при } V < \dot{y}. \end{cases} \quad (26)$$

Дифференцируя выражение (24) по времени и вычисляя скорость $V_{\text{отн}}$ тела A относительно плиты B , получим

$$V_{\text{отн}} = V - \omega y_0 \cos \omega t. \quad (27)$$

На фиг. 7 изображена эта зависимость. Относительная скорость, как функция времени, изображается синусоидой, сдвинутой на величину V по оси ординат. Из графика видно, что при $V < \omega y_0$ за один период T колебаний промежуток времени $(T - 2T_1)$, в течение которого $V_{\text{отн}}$ положительна, больше, чем промежуток времени $2T_1$, в течение которого $V_{\text{отн}}$ отрицательна. Под этим графиком изображен график зависимости силы трения P от времени. В течение одного периода колебаний на некотором промежутке времени $2T_1$ сила трения направлена влево (отрицательна), а на промежутке времени $T - 2T_1$ сила трения положительна и направлена против движения (вправо). Таким

образом, при движении тела A по колеблющейся плите сила трения периодически изменяет свое направление, если $V < \omega y_0$, причем большую часть времени сила трения направлена против движения, и, таким образом, в среднем трение оказывает сопротивление движению тела A . Для того, чтобы осуществлять равномерное движение тела A влево, нужно приложить к нему переменную во времени силу, которая в каждый момент времени была бы равна силе трения. Вычислим среднее за период значение P_{cp} этой силы, понимая под нею такую постоянную силу, которая за один период приводит на абсолютном перемещении тела A такую же работу, как фактическая сила трения. В данном слу



Фиг. 7

чае такое осреднение будет то же, что и осреднение по импульсу силы.

Работа осредненной силы за один период колебаний T плиты будет равна:

$$A_{cp} = P_{cp} VT.$$

Работа, производимая за один период силой трения, будет равна

$$A_{тр} = P_0 V(T - 2T_1) - P_0 V(2T_1) = P_0 V(T - 4T_1).$$

Приравнявая эти два значения работы, получим следующее выражение для осредненной движущей силы:

$$P_{cp} = P_0 \left(1 - 4 \frac{T_1}{T} \right). \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что $\cos \omega T_1 = \frac{V}{\omega y_0}$. Отсюда, учитывая, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получим:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{V}{\omega y_0} \right).$$

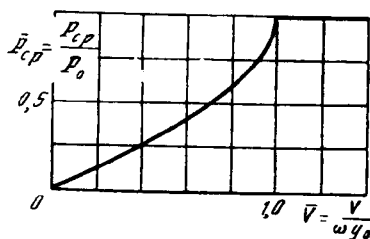
Подставляя последнее выражение в (28), получаем:

$$\bar{P}_{cp} = \frac{P_{cp}}{P_0} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{V}{\omega y_0} \right) \text{ при } V < \omega y_0. \quad (29)$$

Кроме того,

$$\bar{P}_{cp} = \frac{P_{cp}}{P_0} = 1 \text{ при } V > \omega y_0, \quad (30)$$

так как в этом случае сила трения не изменяет знака.



Фиг. 8

На фиг. 8 представлена эта зависимость. Из графика видно, что с увеличением скорости движения тела A по вибрирующей плите осредненная сила трения возрастает до тех пор, пока возрастающая скорость движения V не будет равна скорости ωy_0 вибраций плиты. При $V > \omega y_0$ сила трения остается постоянной и равной ее значению при отсутствии вибраций плиты.

При малых значениях отношения $\left(\frac{V}{\omega y_0}\right)$, т. е. в тех случаях, когда тело A медленно движется по плите B , вибрирующей с весьма высокой частотой ω , выражение (29) упрощается.

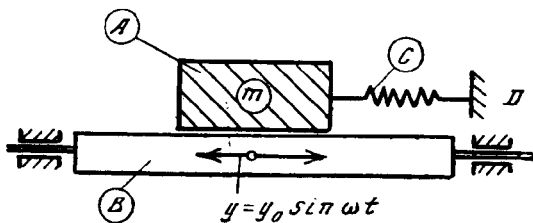
Если $\cos\left(\frac{V}{\omega y_0}\right)$ разложить в ряд по степеням $\left(\frac{V}{\omega y_0}\right)$ и ограничиться двумя первыми членами, то получим:

$$\bar{P}_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} \frac{V}{\omega y_0}.$$

Таким образом, в случае, когда тело медленно движется по быстро вибрирующей плите, осредненная сила трения пропорциональна первой степени скорости:

$$P_{\text{ср}} = kV, \quad (31)$$

где коэффициент пропорциональности $k = \frac{2}{\pi} \frac{P_0}{\omega y_0}$ и зависит от амплитуды и частоты вибраций плиты.



Фиг. 9

Из сказанного выше видно, что при рассмотренных условиях сухое трение в известном смысле эквивалентно линейному вязкому трению. Это важное обстоятельство было впервые обнаружено Гейнрихом [7] и проверялось экспериментально А. А. Красовским [5].

Пусть далее мы имеем систему с одной степенью свободы, изображенную на фиг. 9. Тело A с массой m с помощью пружины жесткостью c прикреплено к неподвижной опоре D . При горизонтальном колебании тело A скользит по плите B , совершающей горизонтальные колебания с частотой ω и амплитудой y_0 . Если частота собственных колебаний тела A на пружине $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ при отсутствии трения весьма мала по сравнению с частотой ω вибраций плиты B и если амплитуды колебаний тела A малы, можно считать, что движение груза описывается линейным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0, \quad (32)$$

где x — абсолютное смещение тела, а коэффициент k определяется по приведенной выше формуле.

При таком подходе к задаче фактически предполагается, что в каждый момент движения сила трения, приложенная к плите, равна

тому ее значению, которое соответствует движению тела с постоянной скоростью, такой же, как в данный момент времени.

Следовательно, коэффициент затухания собственных колебаний тела A обратно пропорционален амплитуде вибраций плиты, так что всякое увеличение амплитуды вибраций плиты приводит к уменьшению демпфирования при собственных колебаниях тела A . Конечно, это верно только в том случае, когда сухое трение относительно невелико, так как в противном случае вибрирующая плита заставит тело A совершать колебания с частотой ее вибраций. Мы же здесь полагаем, что вибрациями тела A с высокой частотой ω можно пренебречь.

Полученный здесь вывод можно сформулировать несколько иначе. Если в элементе с сухим трением относительное смещение z трущихся поверхностей происходит во времени по закону $z = x + y$, где x и y — гармонические функции времени; $x = x_0 \cos pt$; $y = y_0 \cos \omega t$, причем частота ω значительно выше частоты p и величина $\bar{p}x_0$ значительно меньше величины ωy_0 , то сила сухого трения совершает на перемещении x такую же работу, какую совершил бы элемент линейного трения, дающий силу, пропорциональную скорости,

$$P_x = k \frac{dx}{dt}$$

и имеющий коэффициент $k = \frac{2}{\pi} \frac{P_0}{\omega y_0}$, где P_0 — сила сухого трения.

Нетрудно убедиться в том, что приведенные выше соображения остаются справедливыми в случае, когда в элементе сухого трения имеют место не линейные, а угловые перемещения, как, например, в демпфере вертикального шарнира лопасти вертолета.

А. В. Некрасов [4] исследовал подобное явление в случае, когда частота ω меньше p , и получил для этого случая аналогичный результат. По-видимому, вообще не обязательно требовать, чтобы частота была значительно выше p . Достаточно, чтобы ω была в три—четыре раза больше p . Точность выведенных формул при этом будет достаточной для целей практики.

На основании изложенного выше можно сделать следующий вывод. Если лопасть с фрикционным демпфером совершает собственные колебания в плоскости вращения, частота которых $p_\lambda = (0,2 \div 0,3)\omega$ (где ω — угловая скорость вращения винта), и одновременно имеют место вынужденные колебания лопасти в плоскости вращения с частотой ω и происходящие по закону $\xi_{\text{вынужд}} = \xi_0 \cos \omega t$, где ξ_0 — угловая амплитуда вынужденных колебаний, то при вычислении демпфирования собственных колебаний лопасти можно считать, что в вертикальном шарнире имеется линейный демпфер, создающий момент M_d относительно шарнира, пропорциональный угловой скорости лопасти $\dot{\xi}_{\text{собств}}$ при собственных колебаниях:

$$M_d = k_\lambda \dot{\xi}_{\text{собств}}, \quad (33)$$

причем коэффициент k_λ демпфирования лопасти определяется по формуле

$$k_\lambda = \frac{2}{\pi} \frac{M_0}{\omega \xi_0}, \quad (34)$$

где M_0 — момент затяжки фрикционного демпфера.

Амплитуда ξ_0 вынужденных колебаний лопасти может быть просто определена, если считать, что маховое движение лопасти вызывается

кориолисовыми силами. В этом случае можно пользоваться известной формулой для амплитуды первой гармоники махового движения в плоскости вращения:

$$\xi_0 = \frac{a_1 a_0}{1 - \gamma_0^2}, \quad (35)$$

где a_1 — амплитуда махового движения лопасти в плоскости взмаха,
 a_0 — угол конусности винта,
 γ_0 — отношение частоты собственных колебаний лопасти относительно вертикального шарнира к угловой скорости вращения винта;

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{I_{в. ш} S_{в. ш}}{I_{в. ш}}};$$

где $I_{в. ш}$ — расстояние от оси вращения винта до оси вертикального шарнира,
 $S_{в. ш}$ — статический момент массы лопасти относительно вертикального шарнира,
 $I_{в. ш}$ — момент инерции лопасти относительно вертикального шарнира.

Величина a_1 амплитуды махового движения, вызванного наклоном ручки автомата перекоса, обычно известна для каждого вертолета как функция величины отклонения ручки управления. Таким образом, формулы (34) и (35) позволяют определять коэффициент демпфирования лопасти в зависимости от положения ручки управления.

Зная коэффициенты демпфирования шасси и лопасти и массовые характеристики фюзеляжа, можно рассчитывать границы зон неустойчивости вертолета на пробеге по графикам. При этом безразмерный коэффициент демпфирования шасси $\bar{n}$ можно определять по формуле (23), а безразмерный коэффициент демпфирования лопасти — по формуле

$$\bar{n}_л = \frac{k_л}{2I_{в. ш} p},$$

где p — частота собственных поперечных колебаний вертолета на пробеге, определяемая формулой (20).

Приведенная масса вертолета определяется при этом по формуле (22).

Если давление предварительной затяжки амортизационных стоек шасси велико и при пробеге стойки не работают, то в формуле (23) следует полагать $k_y = 0$, а жесткость вертикальных пружин c_y следует брать равной вертикальной жесткости пневматика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жеребцов Б. Я. Динамическая устойчивость несущего винта вертолета с учетом упругости его опоры. В сб. работ по теоретическому исследованию явления «земной резонанс» вертолета. Изд. БНИ ЦАГИ, 1966.
2. Колдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Труды ЦАГИ № 804, 1945.
3. Гродко Л. Н. Земной резонанс. В книге «Вертолеты», ч. II, Изд. «Машиностроение», 1967.
4. Некрасов А. В. Флаттер несущего винта. Там же, ч. I, 1966.
5. Красовский А. А. О вибрационном способе линеаризации некоторых нелинейных систем. «Автоматика и телемеханика» № 1, т. 9, 1948, стр. 20—29.
6. Gilly J., Normand Y. Stabilité au sol des hélicoptères tri-paies. «Technique et Science Aeronautiques», 6, 1952.
7. Heinrich. Über die Kompensation der Reibung durch zusätzliche Schwingbewegung. ZAMM, 22, 136—142, 1942.

ЗЕМНОЙ РЕЗОНАНС ВЕРТОЛЕТА С ОТРЫВОМ ПНЕВМАТИКОВ ОТ ЗЕМЛИ

А. Н. БЕЛОЗЕРОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Приведены результаты моделирования колебаний вертолета на земле с отрывом пневматиков от земли с целью выяснения условий возникновения земного резонанса и нахождения способов его устранения.

ВВЕДЕНИЕ

Обычная теория земного резонанса предполагает, что колебания фюзеляжа на шасси происходят без отрыва пневматиков от земли, т. е. без подпрыгивания вертолета. В этом случае, если не учитывать нелинейность характеристик амортизационной стойки и пневматика, частота собственных колебаний вертолета на земле не будет зависеть от амплитуды. Однако при посадке вертолета на одно колесо и достижении точно большой разгрузки шасси за счет тяги иногда наблюдаются колебания вертолета с отрывом пневматика от земли. Подпрыгивание приводит к уменьшению частоты собственных колебаний вертолета, тем больше, чем больше амплитуда колебаний. Действительно, с ростом амплитуды колебаний контакт пневматика с землей будет продолжаться все меньшую часть периода, поэтому осредненная за период жесткость пневматика будет уменьшаться, что и приведет к уменьшению частоты.

Из теории земного резонанса известно, что колебания вертолета могут стать неустойчивыми только в определенном диапазоне чисел оборотов несущего винта, который зависит от частоты собственных колебаний вертолета на земле; середину этого диапазона ω^* приближенно можно определить по формуле:

$$\omega^* = \frac{p}{1 - \nu_0}.$$

Большинство отечественных и зарубежных вертолетов спроектированы так, что наиболее опасная область неустойчивости, соответствующая второму тону колебаний вертолета на земле относительно продольной оси, находится (при отсутствии подпрыгивания) выше рабочих чисел оборотов, т. е. имеет место соотношение $\omega^* > \omega_{\text{раб}}$. Если же начнутся колебания вертолета с подпрыгиванием, то при достаточно большой амплитуде колебаний частота собственных колебаний p и,

неоднократно, ω^* могут уменьшиться до такой величины, что $\omega^* < \omega_{\text{раб}}$, и зона неустойчивости передвинется в область рабочих чисел оборотов.

1) том, что все вертолеты, у которых область неустойчивости, соответствующая второму тону колебаний, лежит выше рабочих чисел оборотов, могут иметь земной резонанс с подпрыгиванием, впервые нами описано в работе Фукса*.

Настоящая работа ставила своей целью выяснить, при каких условиях может возникнуть земной резонанс с подпрыгиванием и какими способами можно устранить возможность возникновения этого явления.

Расчет велся применительно к одновинтовым вертолетам типа Ми-4 и Ми-6. При допущенных предположениях задача свелась к решению четырех дифференциальных нелинейных уравнений 2-го порядка, к которым в случае учета работы амортизации шасси добавлялись еще три нелинейных уравнения 1-го порядка обжатия амортизаторов. Полученная система уравнений решалась на электроинтеграторах типа ИПТ-5 и МИ-7. Решение системы представлено в виде зависимости амплитуд установившихся колебаний и величины порога возбуждения от тяги при различных числах оборотов винта. Показано также, при каком значении сброса тяги колебания вертолета будут затухать.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим собственные колебания вертолета с подпрыгиванием. Сделаем следующие упрощающие предположения:

1. Колебания вертолета происходят на пробежке с достаточно большой скоростью. Это приводит к тому, что боковой жесткостью амортизаторов можно пренебречь (так, как это показано в работе И. И. Гродко, см. стр. 28 настоящего сборника); она изменяется с изменением скорости по закону

$$c_b = \frac{c_{b0}}{1 + \left(\frac{V_r}{r_k p} \right)^2},$$

при скоростях порядка 70 км/час для вертолета Ми-6 отношение $\frac{c_{b0}}{c_b} = 0,2$.

2. Центр тяжести вертолета находится на оси вращения несущего винта и над главным шасси; продольная ось является главной осью инерции.

3. Со стороны несущего винта на вертолет действует только сила тяги, направление которой при колебаниях совпадает с направлением вращения винта.

При этих предположениях колебания вертолета с подпрыгиванием можно представить как колебания на упругой опоре некоего коромысла, имеющего массу M и момент инерции I и обладающего двумя степенями свободы (фиг. 1, где y —смещение центра тяжести коромысла, φ —угол поворота коромысла относительно центра тяжести). Связь между коромыслом с опорой освобождающая, т. е. опора может действовать на коромысло с силой, направленной только вверх. Кроме того, перемещение опоры вверх ограничено осью x —это условие возможности подпрыгивания вертолета.

* Fuchs H. Investigation of ground resonanse in helicopters with an analogue computer. The Journal of the Helicopter Association of Great Breat., vol. 11, No. 5, October, 1957.

При отсутствии амортизационных стоек в шасси приведенные выше условия могут быть выражены следующим образом:

Для левой опоры

Сила F_{λ} , действующая со стороны левой опоры на коромысло,

$$F_{\lambda} \leq 0;$$

если перемещение плеча коромысла $y + b\vartheta \leq 0$, то

$$F_{\lambda} = 0.$$

Для правой опоры

Всегда $F_{\pi} \leq 0$;

$$F_{\pi} = 0 \quad \text{при} \quad y - b\vartheta \leq 0.$$

Будем считать, что жесткость и демпфирование пневматика линейны. Тогда условия (1) и (2) можно переписать в виде:

Для левой опоры

$$F_{\lambda} = \begin{cases} -c_{\pi}(y + b\vartheta) - k_{\pi}(\dot{y} + b\dot{\vartheta}) & \text{при } c_{\pi}(y + b\vartheta) + k_{\pi}(\dot{y} + b\dot{\vartheta}) > 0, \\ 0 & \text{при } c_{\pi}(y + b\vartheta) + k_{\pi}(\dot{y} + b\dot{\vartheta}) \leq 0 \\ & \text{и при } y + b\vartheta \leq 0. \end{cases}$$

Для правой опоры

$$F_{\pi} = \begin{cases} -c_{\pi}(y - b\vartheta) - k_{\pi}(\dot{y} - b\dot{\vartheta}) & \text{при } c_{\pi}(y - b\vartheta) + k_{\pi}(\dot{y} - b\dot{\vartheta}) > 0, \\ 0 & \text{при } c_{\pi}(y - b\vartheta) + k_{\pi}(\dot{y} - b\dot{\vartheta}) \leq 0 \\ & \text{и при } y - b\vartheta \leq 0. \end{cases}$$

Если демпфированием в пневматике пренебречь, то условия (3) могут быть записаны проще:

$$F_{\lambda} = \begin{cases} -c_{\pi}(y + b\vartheta) & \text{при } y + b\vartheta > 0; \\ 0 & \text{при } y + b\vartheta \leq 0; \end{cases}$$

$$F_{\pi} = \begin{cases} -c_{\pi}(y - b\vartheta) & \text{при } y - b\vartheta > 0; \\ 0 & \text{при } y - b\vartheta \leq 0. \end{cases}$$

Так как демпфирование в реальных пневматиках сравнительно мало, то применение ограничений по перемещению, как в выражении (4), а не по силе, как в выражении (3), дает очень небольшую погрешность, поэтому при электро моделировании можно пользоваться ограничением по перемещению как более простым.

Уравнения колебаний вертолета могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} M\ddot{y} = G - T + F_{\pi} + F_{\lambda}, \\ I\ddot{\vartheta} = bF_{\pi} - bF_{\lambda}, \end{cases}$$

где F_{π} и F_{λ} определяются по формулам (3) и (3а).

Если ограничиться колебаниями, при которых пневматики не отрываются от земли, то система (5) запишется в виде двух уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{y} = G - T - 2c_{\pi}y - 2k_{\pi}\dot{y}, \\ I\ddot{\vartheta} = b^2 2c_{\pi}\vartheta - b^2 2k_{\pi}\dot{\vartheta}. \end{cases}$$

Разделим первое и второе уравнения системы (5) соответственно на M и I и введем координаты y_1 и y_2 , представляющие собой перемещение левого и правого плеч коромысла:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y + b\vartheta, \\ y_2 &= y - b\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда система (5) примет вид:

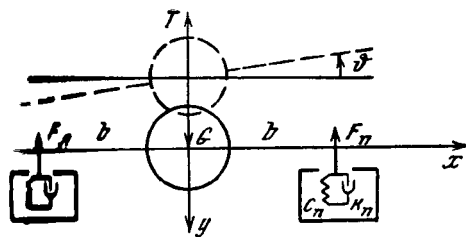
$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \Delta g + \bar{F}_1 \left(1 + \frac{Mb^2}{I} \right) + \bar{F}_2 \left(1 - \frac{Mb^2}{I} \right), \\ \ddot{y}_2 &= \Delta g + \bar{F}_2 \left(1 + \frac{Mb^2}{I} \right) + \bar{F}_1 \left(1 - \frac{Mb^2}{I} \right); \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\mu_i = \begin{cases} -p_1^2 y_j - 2n_n \dot{y}_j & \text{при } p_1^2 y_j + 2n_n \dot{y}_j > 0; \\ 0 & \text{при } p_1^2 y_j + 2n_n \dot{y}_j \leq 0 \text{ и при } y_j \leq 0; \end{cases} \quad (7a)$$

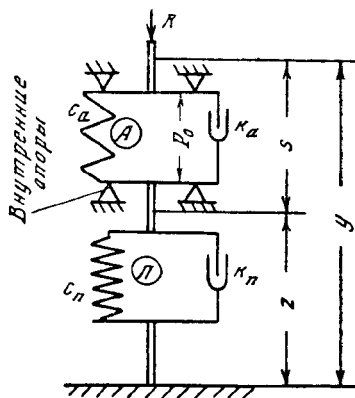
здесь

$\Delta g = \frac{G - T}{M}$ — ускорение свободного падения вертолета под действием силы веса и тяги;

$$p_1^2 = \frac{c_n}{M}; \quad 2n_n = \frac{k_n}{M}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Учтем теперь работу амортизаторов шасси. Упругая опора в этом случае будет состоять не из одной пружины и демпфера, как это показано на фиг. 1, а из двух последовательно соединенных пружин и демпферами (фиг. 2). Амортизатор, обозначенный на схеме буквой А, представляет собой пружину и демпфер с предварительной затяжкой P_0 ; внутренние опоры, которые могут двигаться вместе с амортизатором, эквивалентны ограничителю в реальной стойке.

Запишем условие равновесия сил, действующих на шасси:

$$P_0 + c_a S + k_a \dot{S} = c_n z + k_n \dot{z}, \quad (8)$$

причем амортизатор будет только тогда обжиматься, когда

$$c_n z + k_n \dot{z} > P_0. \quad (9)$$

Если сила, действующая на амортизатор, меньше силы начального сжатия амортизатора, то $S = 0$.

Кроме того, к уравнению (8) необходимо добавить условие, накладываемое ограничителями хода стойки, а именно: всегда

$$S \geq 0. \quad (10)$$

Полное обжатие шасси y будет складываться из обжатия амортизатора и обжатия пневматика:

$$y = z + S. \quad (1)$$

Исключив из уравнений (8) и (11) обжатие пневматика, получим следующее уравнение обжатия амортизатора:

$$\left. \begin{aligned} P_0 + c_a S + k_a \dot{S} &= c_n (y - S) + k_n (\dot{y} - \dot{S}) \quad \text{при} \quad c_n (y - S) + k_n (\dot{y} - \dot{S}) \geq P_0, \\ S &= 0 \quad \text{при} \quad c_n (y - S) + k_n (\dot{y} - \dot{S}) < P_0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и всегда $S \geq 0$.

При работающих амортизационных стойках в уравнении (7) выражения для сил изменятся, так как вместо y нужно везде поставить $y - S$.

Прежде чем записать систему (7) в окончательном виде, перейдем к безразмерным координатам.

Введем безразмерное время $\tau = q_2 t$, где $q_2^2 = p_1^2 \left(1 + \frac{Mb^2}{I}\right)$, и безразмерные координаты

$$\bar{y} = \frac{y q_2^2}{g}; \quad \bar{S} = \frac{S q_2^2}{g}; \quad \Delta \bar{g} = \frac{\Delta g q_2^2}{g}. \quad (13)$$

Система (7) совместно с уравнениями обжатия амортизационных стоек (12) запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1'' &= f_1 - \bar{q}_1^2 f_2 + \Delta \bar{g}, \\ \bar{y}_2'' &= f_2 - \bar{q}_1^2 f_1 + \Delta \bar{g}; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$f_i = \begin{cases} -\bar{y}_j + \bar{S}_j - 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') & \text{при} \quad \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \leq 0 \text{ и } \bar{y}_j \leq 0; \end{cases} \quad (14a)$$

$$i = 1, 2;$$

$$\left. \begin{aligned} y^* + \frac{c_a}{c_n} \bar{S}_j + 2\bar{n}_a \bar{S}_j' &= \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \\ \text{при} \quad \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') &> y^*, \\ \bar{S}_j &= 0, \\ \text{при} \quad \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') &\leq y^*, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и всегда $\bar{S}_j \geq 0$.

Здесь

$2\bar{n}_a = \frac{k_a q_2}{c_n}$ — безразмерный коэффициент демпфирования амортизационной стойки,

$y^* = \frac{P_0 q_2^2}{c_n g}$ — безразмерная сила начального давления в стойке,

$$\bar{q}_1^2 = \frac{\frac{Mb^2}{I} - 1}{\frac{Mb^2}{I} + 1}.$$

Анализ приведенной к безразмерному виду системы (14) позволяет сразу же сделать вывод о влиянии тяги и начального давления в стойке на колебания вертолета с подпрыгиванием, не прибегая к решению этой системы.

Рассмотрим сначала укороченную систему, когда стойки вообще не включаются: $\bar{S} \equiv \bar{S}' \equiv 0$.

Разделим оставшуюся систему на Δg ; тогда, вводя $\bar{y}_j = \frac{y_j}{\Delta g}$ вместо прежней безразмерной переменной y_j , получим систему уравнений и граничных условий подпрыгивания, не зависящие явно от Δg , т. е. от тяги. Следовательно, частота и степень затухания полученной системы будут зависеть только от $\bar{y}$.

Для определенности положим, что при значении амплитуды $\bar{y}_j = A$ частота и степень затухания колебаний будут соответственно p_A и h_A . Из этого следует из (13), условию равенства $\bar{y}_j = A$ удовлетворяют амплитуды колебаний y , равные:

$$y = A \frac{1}{q_2^2} \frac{g}{M} (G - T).$$

Следовательно, если при малых значениях разности $(G - T)$, т. е. при большой тяге, для получения частоты p_A и декремента h_A требуется определенная амплитуда колебаний y (где y — уже размерная величина), то при значении разности, в n раз большей $[n(G - T)]$, т. е. при меньшем значении тяги, для получения такого же значения частоты и декремента требуется в n раз большая амплитуда колебаний.

Если рассматривать теперь полную систему (14) и (14а), разделив предварительно на Δg , то в уравнение дополнительно войдет пара-

метр $\bar{y}^* = \frac{y^*}{\Delta g}$ — безразмерная величина силы начального давления

на стойку. Аналогичные рассуждения показывают, что для получения определенного значения частоты и декремента собственных колебаний вертолета в этом случае значения p_0 и $G - T$ должны удовлетворять отношению

$$\frac{p_0}{G - T} = \text{const}, \quad (16)$$

амплитуды должны, как и прежде, удовлетворять отношениям

$$\frac{y}{G - T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{y}{p_0} = \text{const}.$$

При этих условиях $\bar{y}^*$ и $\bar{y}$ будут неизменны, и, следовательно, частоты и декременты должны также остаться неизменными.

Перейдем к связанным колебаниям фюзеляжа вертолета и лопастей несущего винта в плоскости вращения.

Известно, что в этом случае (при предположении о линейности деформаций в вертикальных шарнирах) можно не исследовать движение лопастей вертолета в отдельности, а рассмотреть координаты ζ и η , связанные с движением центра тяжести несущего винта в двух перпендикулярных направлениях.

Уравнение собственных колебаний несущего винта запишется тогда в виде

$$\begin{aligned} \eta'' + 2\bar{n}_\eta \eta' - \bar{\omega}^2 (1 - v_0^2) \eta - 2\bar{\zeta}' \bar{\omega} - 2\bar{n}_\eta \bar{\omega} \zeta &= 0, \\ \zeta'' + 2\bar{n}_\zeta \zeta' - \bar{\omega}^2 (1 - v_0^2) \zeta + 2\eta' \bar{\omega} + 2\bar{n}_\zeta \bar{\omega} \eta &= 0; \end{aligned}$$

здесь штрих обозначает, как и прежде, дифференцирование по безразмерному времени $\tau = q_2 t$;

$\bar{\omega} = \frac{\omega}{q_2}$ — безразмерная угловая скорость вращения несущего винта;

$\bar{n}_\lambda = \frac{k_\lambda}{q_2 I_{в.ш}}$ — безразмерный коэффициент демпфирования колебаний лопасти относительно вертикального шарнира.

Колебания фюзеляжа, связанные с перемещением втулки в плоскости вращения несущего винта, приводят к появлению инерционных сил, действующих на несущий винт. Эти силы выражаются в виде

$$F_{ин. ф} = \frac{k}{2} S_{в.ш} \ddot{x},$$

где x — перемещение втулки несущего винта в плоскости вращения.

При колебаниях вертолета с подпрыгиванием, описываемых системой (5), к перемещениям втулки в плоскости вращения приводит только поворот ϑ фюзеляжа относительно продольной оси; вертикальные перемещения фюзеляжа y не приводят к перемещению втулки в плоскости вращения. Следовательно, в нашем случае

$$x = h\vartheta = \frac{h}{2b} (y_1 - y_2),$$

где h — расстояние от ц. т. вертолета до плоскости вращения винта.

С другой стороны, при колебаниях лопастей на фюзеляж будет действовать инерционная сила, приложенная к втулке и равная в направлении поперечной оси вертолета

$$F_{ин. л} = S_{в.ш} \ddot{\eta}.$$

Приводя полученные члены связи к безразмерному виду, получим окончательно следующую систему уравнений, описывающих совместные колебания фюзеляжа вертолета и лопастей:

$$\left. \begin{aligned} \eta'' + 2\bar{n}_\lambda \eta' - \bar{\omega}^2 (1 - \nu_0^2) \eta - 2\zeta' \bar{\omega} - 2\bar{n}_\lambda \bar{\omega} I + \varepsilon_\eta (\bar{y}_1'' - \bar{y}_2'') &= 0, \\ \zeta'' + 2\bar{n}_\lambda \zeta' - \bar{\omega}^2 (1 - \nu_0^2) \zeta + 2\eta' \bar{\omega} + 2\bar{n}_\lambda \bar{\omega} \eta &= 0, \\ \bar{y}_1'' &= f_1 - \bar{q}_1^2 f_2 + \Delta \bar{g} - \varepsilon_y \eta'', \\ \bar{y}_2'' &= f_2 - \bar{q}_1^2 f_1 + \Delta \bar{g} + \varepsilon_y \eta'', \\ f_j &= \begin{cases} -\bar{y}_j + \bar{S}_j - 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') & \text{при } \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') > 0, \\ 0 & \text{при } \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \leq 0 \text{ и } y_j \leq 0; \end{cases} \\ y_j^* + \frac{c_a}{c_n} \bar{S}_j + 2\bar{n}_a \bar{S}_j &= \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \\ &\text{при } \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') > y^*, \\ \bar{S}_j &= 0 \quad \text{при } \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \leq y^*, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и всегда $\bar{S}_j \geq 0$.

Здесь

$$\varepsilon_\eta = \frac{k}{4} \frac{S_\lambda h g}{I_{в.ш} b q_2^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{S_\lambda h b q_2^2}{I g},$$

где S_λ — статический момент массы лопасти.

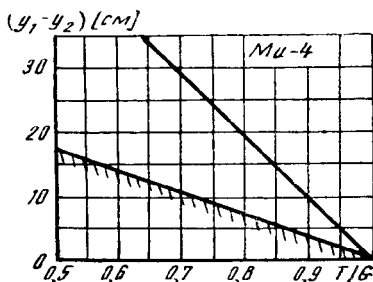
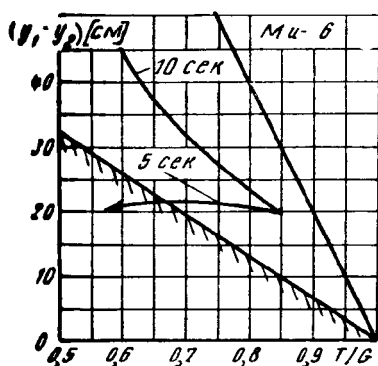
Решение полученной нелинейной системы высокого порядка производилось на электронно-моделирующих машинах типа ИПТ-5 и МН-7.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Коэффициенты системы (17) имели следующие значения: $\nu_0 = 0,277$; $\bar{n}_n = 0,2$; $2\bar{n}_n = 0,1$; $2\bar{n}_a = 1,83$; $q_2 = 10,2 \frac{1}{\text{сек}}$; $\epsilon = \epsilon_y \epsilon_\eta = 0,0245$; $\bar{q}_1^2 = 0,506$.

Относительные числа оборотов $\bar{\omega}$ несущего винта изменялись в пределах от 0,6 до 1,6. Отношение c_a/c_n жесткости амортизатора, приведенной к колесу, и жесткости пневматика принималось равным 0,1; 0,2 и 0,5.

В систему (17) входят величины y^* и $\bar{\Delta g}$. Как уже говорилось выше, можно разделить все уравнения системы на $\bar{\Delta g}$, то поведение системы будет определяться только отношением $\frac{y^*}{\bar{\Delta g}}$, т. е. $\frac{P_0}{G - T}$. Поэтому можно задаваться произвольным значением y^* , удобным для решения на вычислительной машине, а тягу и значения амплитуд y_1 и y_2 определить из соотношений (13) и (15) для реального значения P_0 .



Фиг. 3

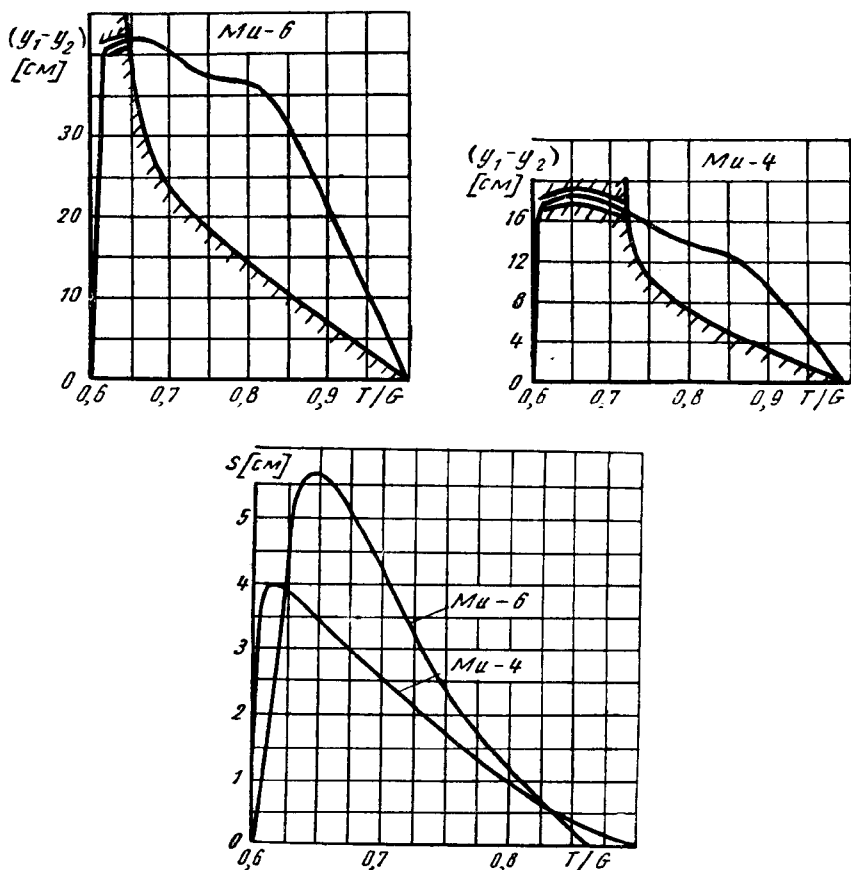
Сила начального давления в стойке, приведенная к колесу, принималась равной $0,25G$, т. е. стойки начинают включаться в работу, когда тяга составляет половину веса.

При решении необходимо было определить, при каких условиях могут возникнуть автоколебания вертолета на земле с подпрыгиванием, амплитуды могут достичь эти колебания, если их не парировать, так необходимо пилотировать вертолет, чтобы эти колебания не возникали.

Сначала все эти обстоятельства были исследованы при числе оборотов винта $n = 113 \text{ об/мин}$ ($\bar{\omega} = 1,15$), что соответствует рабочим числам оборотов несущего винта вертолета Ми-6, т. е. тем, при которых происходит взлет и посадка вертолета.

На фиг. 3 представлены графики, показывающие зависимость амплитуд установившихся колебаний устойчивого предельного цикла и амплитуды порога возбуждения при полностью неработающих стойках ($\bar{n}_n = \infty$) от тяги. Очевидно в силу сказанного выше, что эти зависимости должны быть прямыми. Необходимость существования предельного цикла и порога возбуждения может быть показана следующими простыми рассуждениями. Известно, что область неустойчивости, соответствующая второму тому колебаний, у большинства вертолетов лежит выше рабочих чисел оборотов, причем расположение ее зависит

от частоты второго тона собственных колебаний: чем выше эта частота тем она дальше от рабочих чисел оборотов, и наоборот. Когда вертолет колеблется, не отрывая пневматики от земли, то частота колебаний не зависит от амплитуды, и в силу того, что зона неустойчивости лежит выше рабочих чисел оборотов, колебания эти устойчивы, причем чем меньше тяга, тем больше обжаты пневматики и тем больше возможная амплитуда безотрывных колебаний. При колебаниях с подпрыгиванием частота будет зависеть от амплитуды: при увеличении амплитуды частота будет уменьшаться. Следовательно, начиная с некоторой амплитуды, зона неустойчивости передвинется в область рабочих чисел оборотов. Эта амплитуда и будет порогом возбуждения. При



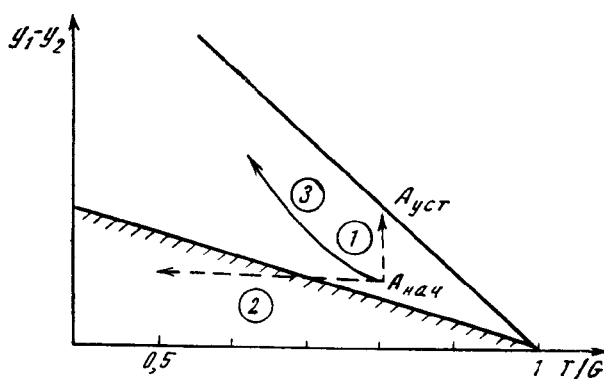
Фиг. 4

дальнейшем росте амплитуды частота может уменьшиться настолько, что зона неустойчивости окажется ниже рабочих чисел оборотов, колебания вертолета не будут больше нарастать—это будет устойчивый предельный цикл. Таким образом, если вертолету сообщить такой начальный удар, что начальные амплитуды будут меньше порога возбуждения колебаний, то они затухнут, если они будут больше порога возбуждения, то должны установиться колебания, соответствующие устойчивому предельному циклу.

Вообще говоря, порог возбуждения представляет собой поверхность в фазовом пространстве $\{\zeta; \eta; \bar{y}_1; \bar{y}_2; \zeta'; \eta'; \bar{y}_1'; \bar{y}_2'\}$, а устойчивый предельный цикл—некую замкнутую траекторию в нем.

В нашем исследовании мы ограничивались некоторым сечением поверхности порога возбуждения, так как полагали, что начальные значения $\zeta, \eta, \zeta', \eta', \bar{y}_1, \bar{y}_2$ равны нулю, и задавались только значениями $\bar{y}_1 = -\bar{y}_2$. Это привело к некоторым на первый взгляд парадоксальным результатам. На фиг. 4 показаны значения $y_1 - y_2$ при установившихся колебаниях и значения, соответствующие сечению поверхности порога возбуждения, при силе начального давления в стойке $P_0 = 0,25G$. Как это следует из графиков, значение $(y_1 - y_2)$ порога при некоторой величине T/G обращается в бесконечность, в то время как устойчивый предельный цикл существует даже при меньших значениях T/G . Этот кажущийся парадокс объясняется тем, что задаваемые начальные условия представляют собой только некое сечение поверхности предельного цикла, которое с уменьшением тяги деформируется так, что при нулевых начальных значениях переменных $\zeta, \eta, \zeta', \eta', \bar{y}_1, \bar{y}_2$ никаким значениям $\bar{y}_1 = -\bar{y}_2$ не удается выйти на предельный цикл. Устойчивый предельный цикл при малых тягах достигался следующим образом: сначала система выводилась на предельный цикл, соответствующий большим значениям тяги, там где начальными $\bar{y}_1 = -\bar{y}_2$ можно это осуществить, а потом тяга медленно уменьшалась до необходимой величины.

Как следует из фиг. 4, при посадках с тягой, близкой к весу, достаточно очень небольшого начального удара, чтобы вызвать незадаваемые колебания вертолета, правда, амплитуда этих колебаний будет также очень мала.



Фиг. 5

Обычно при посадке вертолета после касания земли пневматиком тяга начинает сбрасываться более или менее быстро. Допустим теперь, что посадка произошла с такой степенью грубости, что порог возбуждения для первоначального значения тяги превзойден (для определенности положим, что начальное значение тяги было $0,85G$ и грубость посадки соответствовала $y_1 = -y_2 = 20$ см). Если летчик не будет сбрасывать тягу, то амплитуда колебаний будет увеличиваться до тех пор, пока не достигнет величины, соответствующей амплитуде предельного цикла (на фиг. 5 она обозначена $A_{уст}$, процесс нарастания амплитуды колебаний обозначен отрезком 1). Если летчик после посадки мгновенно сбросит тягу до $0,5G$ (на фиг. 5 это соответствует отрезку 2), то вертолет перейдет в область до порога возбуждения и колебания его затухнут. При медленном сбросе тяги мы из точки $A_{нач}$ будем двигаться одновременно вверх и влево вдоль кривой 3, все время оставаясь выше порога возбуждения, и когда тяга будет сброшена до величины $0,5G$,

колебания вертолета будут продолжать нарастать до амплитуд установившегося цикла, которые для $T=0,5G$ очень велики.

Для некоторых значений начальных амплитуд и начальных тяг при полностью неработающих стойках была определена необходимая высота сброса тяги. Соответствующие результаты приведены ниже в таблице.

	$y_1 - y_2$ [см]	T/G	$t_{\text{сброса}}$ [сек]
Ми-6	20	0,8	<8
	30	0,8	<4
	30	0,7	<5
Ми-4	10	0,8	<8,5
	14	0,8	<6,5
	14	0,7	<5,5

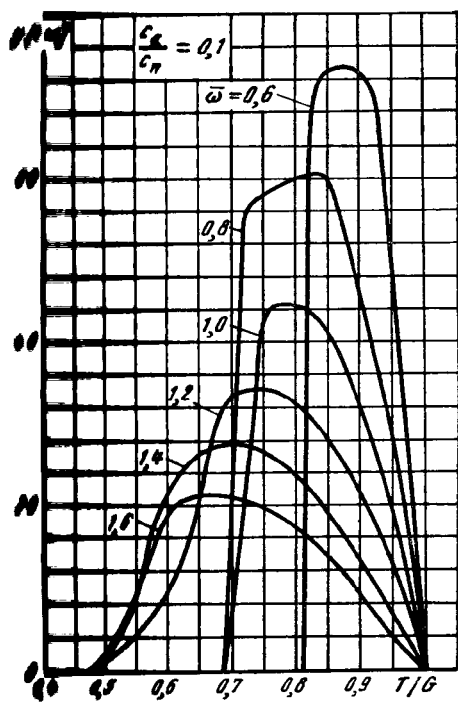
Таким образом, с земным резонансом можно бороться, даже когда стойки не включаются в работу; для этого только грубость посадки должна быть не больше $y_1 - y_2 = 32$ см. При посадках с большой тягой при большой начальной амплитуде выгоднее некоторое время подждать со сбросом тяги, пока не установятся колебания, соответствующие предельному циклу, амплитуда которого будет меньше начального отклонения, и потом уже сбрасывать тягу.

При работе амортизационных стоек, как бы медленно мы ни сбрасывали тягу, если она сделается меньше $T=0,6$, колебания прекратятся. Однако при медленном сбросе тяги колебания могут достигнуть амплитуд порядка 40 см.

Рассмотрим некоторые особенности земного резонанса с подпрыгиванием. Когда стойки не обжимаются или обжимаются очень незначительно, колебания, которые мы называли установившимися, происходят не с постоянной амплитудой, а с пульсирующей. Это явление пока не объяснено. За амплитуду установившихся колебаний мы принимаем максимальную амплитуду, наблюдающуюся за период 7—10 колебаний. Когда амортизационная стойка начинает сильно обжиматься, то амплитуда постепенно выравнивается и становится постоянной. С пульсацией амплитуд колебаний, по-видимому, связано также следующее наблюдавшееся явление. При начальных отклонениях, больших 32 см, и такой начальной тяге, что амплитуда установившихся колебаний также больше 32 см, колебания при сбросе тяги до $0,5G$ иногда затухали в зависимости от того, в каком положении находился вертолет.

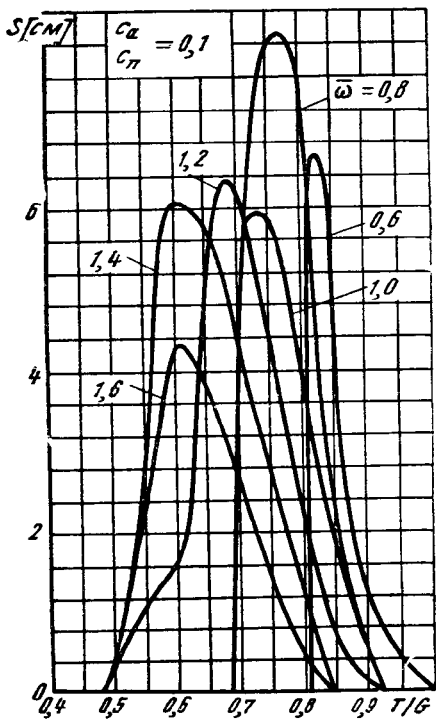
Остановимся на результатах, представленных на фиг. 6—8. В них даны зависимости амплитуд установившихся колебаний от тяги при различных значениях приведенных чисел оборотов несущего винта при различных значениях жесткости амортизационной стойки. Коэффициент демпфирования в стойке считался постоянным и равным на прямом и обратном ходе 180 дан·сек/см. Уменьшение числа оборотов несущего винта приводит к росту амплитуд предельных циклов. Чтобы передвинуть зону неустойчивости в область более низких чисел оборотов, необходимо больше снизить частоту собственных колебаний, что достигается за счет больших амплитуд подпрыгивания. Величина порога возбуждения также будет увеличиваться.

Полученные зависимости качественно описывают влияние боковой жесткости пневматиков на земной резонанс с подпрыгиванием и, следо-

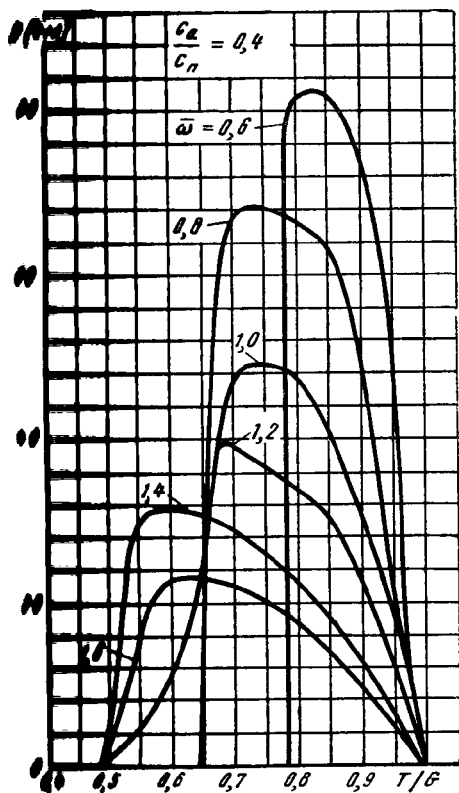


a

Фиг. 6

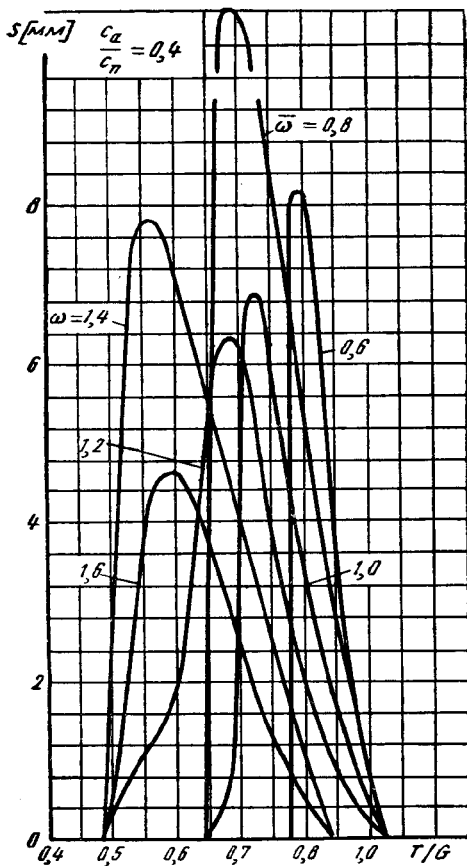


б

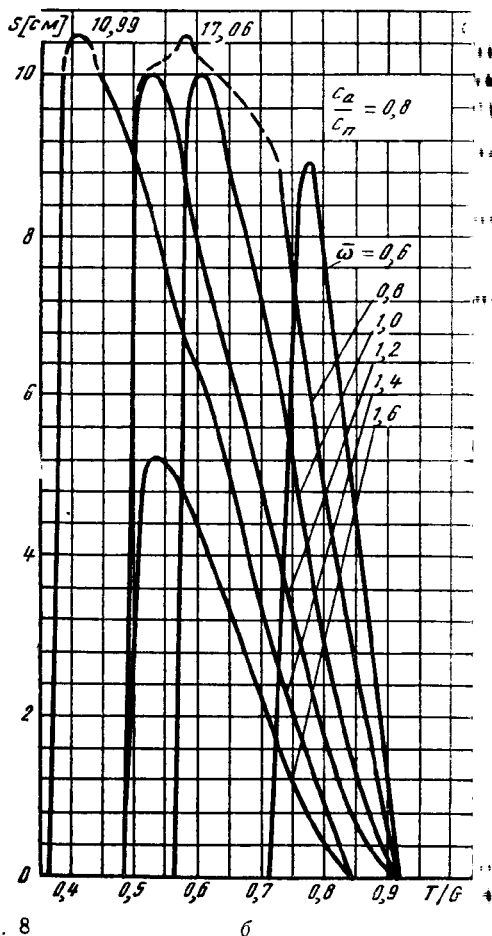
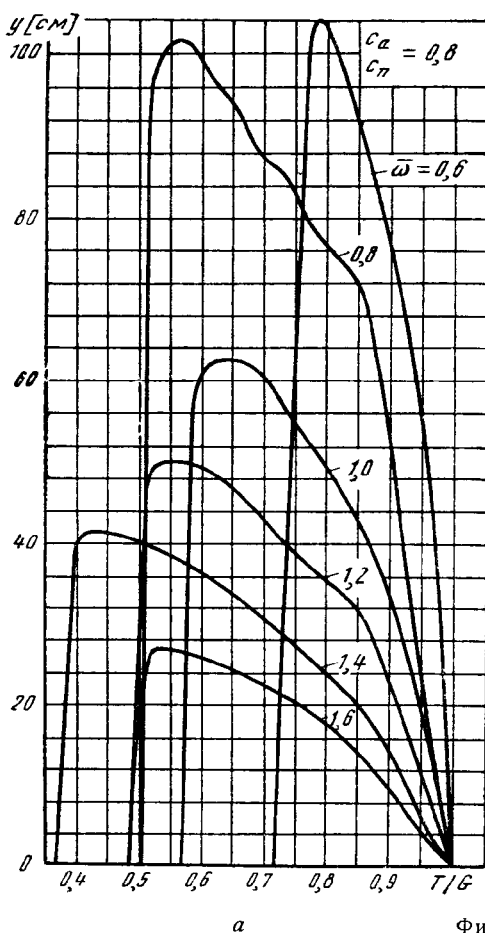


a

Фиг. 7



б



Фиг. 8

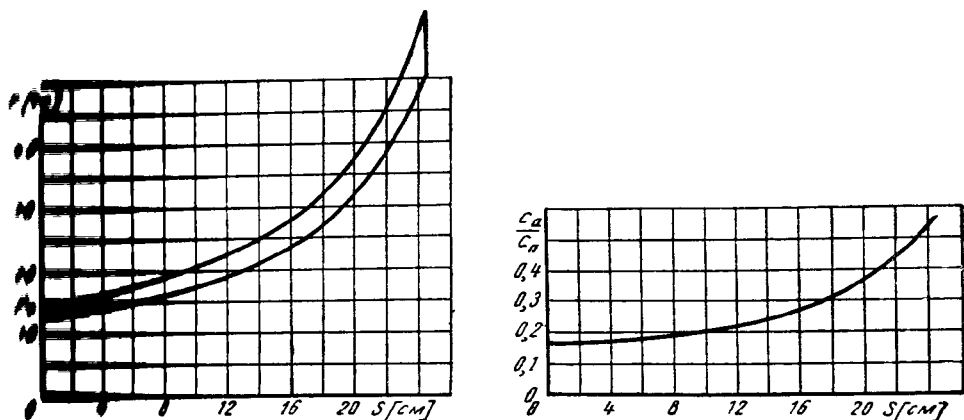
б

вательно, влияние скорости пробежки, так как можно считать, что наличие боковой жесткости увеличивает характерную частоту q_2 . Это значит, что при постоянных числах оборотов несущего винта $\bar{\omega} = \frac{\omega}{q}$ будет уменьшаться. При самолетной посадке вертолета, если лети не производит никаких операций, скорость пробежки уменьшается, что приводит к увеличению боковой жесткости и уменьшению тяги. Это будет соответствовать на фиг. 6—8 движению влево по тяге с одним временным переходом с одной кривой на другую из-за уменьшения $\bar{\omega}$. Амплитуда колебаний может при этом увеличиваться, т. е. можно так неудачно посадить вертолет, что амплитуда колебаний достигнет 1 м.

Фиг. 6—8 показывают также, что с увеличением жесткости амортизационной стойки величина амплитуд предельного цикла увеличивается. Интересно отметить, что вместе с этим происходит увеличение амплитуды обжатия стойки (см. фиг. 6, б, 7, б, 8, б). Как известно, жесткость амортизационной стойки изменяется в зависимости от хода стойки; при малых обжатиях она мала, при больших она резко увеличивается. На фиг. 9 представлены диаграмма статического обжатия стойки и величина осредненного отношения c_a/c_n в зависимости от амплитуды обжатия.

К положенному выше описанию поведения вертолета при различных числах оборотов надо добавить то обстоятельство, что с ростом амплитуды колебаний будет увеличиваться жесткость стойки и мы будем переходить с графиков, соответствующих малым значениям c_a/c_n , например, $\frac{c_a}{c_n} = 0,1$, к графикам, соответствующим большим значениям, например $\frac{c_a}{c_n} = 0,4$.

Остановимся теперь на влиянии силы начального давления в стойке на земной резонанс с подпрыгиванием.



Фиг. 9

Как уже указывалось выше, результаты расчета, полученные для одного значения силы начального давления в стойке, пересчитываются для любого другого значения следующим путем.

Амплитуда колебаний для нового значения силы

$$y_{\text{нов}} = y_{\text{стар}} \frac{P_{0 \text{ нов}}}{P_{0 \text{ стар}}}.$$

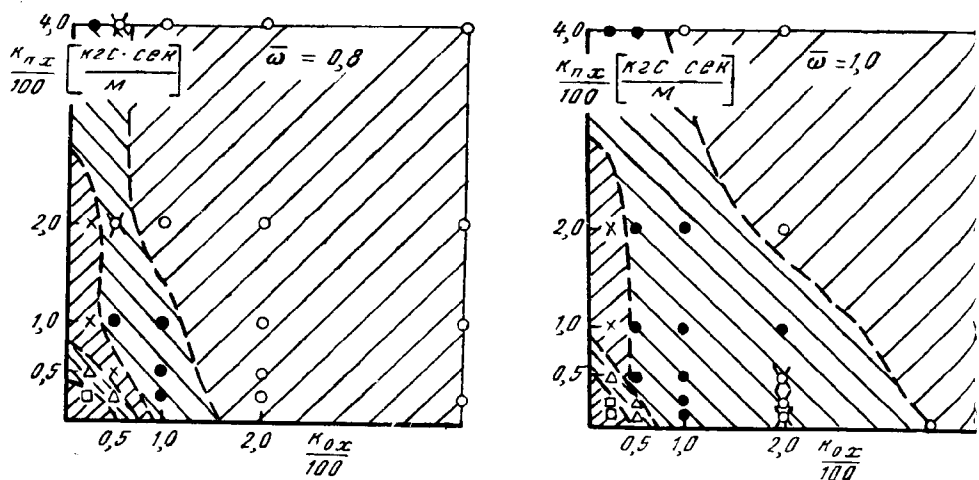
Величина разности между весом и тягой для нового значения силы

$$(G - T)_{\text{нов}} = (G - T)_{\text{стар}} \frac{P_{0 \text{ нов}}}{P_{0 \text{ стар}}}.$$

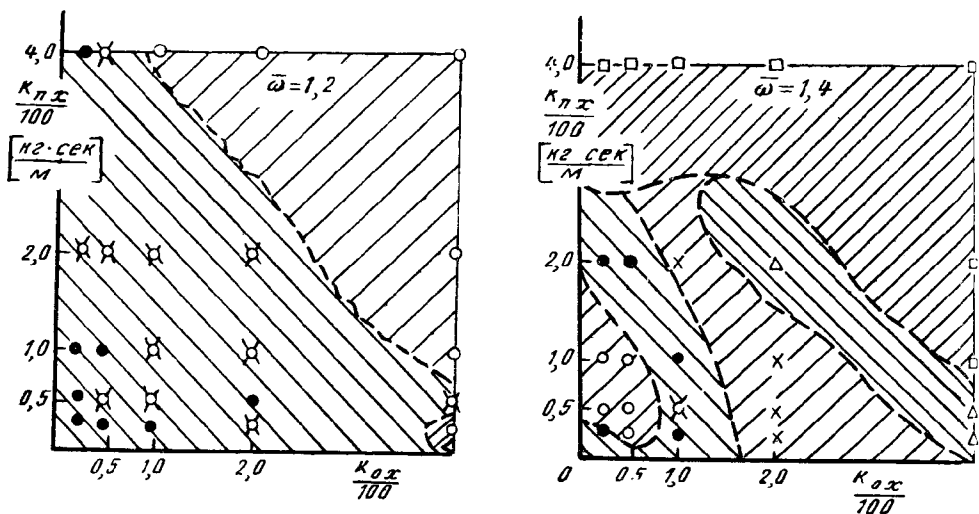
Эти формулы показывают, что если при величине силы начального давления $P_0 = 0,25 G$ при значении тяги, равной, например, $0,8 G$, амплитуда установившихся колебаний была y , то при в пять раз меньшей силе начального давления $P_0 = 0,05 G$ амплитуда установившихся колебаний будет $y/5$ и соответствовать не тяге $0,8 G$, а тяге $0,96 G$. Аналогичные замечания можно сделать и относительно величины порога возбуждения и относительно величины обжатия стойки S .

Таким образом, если при существующей силе начального давления земной резонанс с подпрыгиванием был возможен в диапазоне тяг от $T = 0$ до $T = 0,6 G$ и максимальные амплитуды колебаний были равны 8 см , то при уменьшении силы начального давления в пять раз земной резонанс будет возможен только в диапазоне от $T = G$ до $T = 0,92 G$ и максимальные амплитуды будут всегда около 8 см . Эти данные означают, что земной резонанс практически не возникает.

В заключение рассмотрим вопрос о величине оптимального демпфирования в стойке. Очевидно, что при тех значениях тяги, когда стойка не обжимается или обжимается очень мало, как бы ни изменяли демпфирование в стойке, это не может отразиться на амплитудах установившихся колебаний. Поэтому нет особого смысла изменять демпфирование в этом случае. Оптимальное демпфирование подбиралось по скорости затухания колебаний при мгновенном сбросе тяги с $0,8 G$ до $0,5 G$. На фиг. 10 и 11 даны графики, показывающие расположение областей, в которых скорость затухания колебаний примерно одинакова (в порядке возр



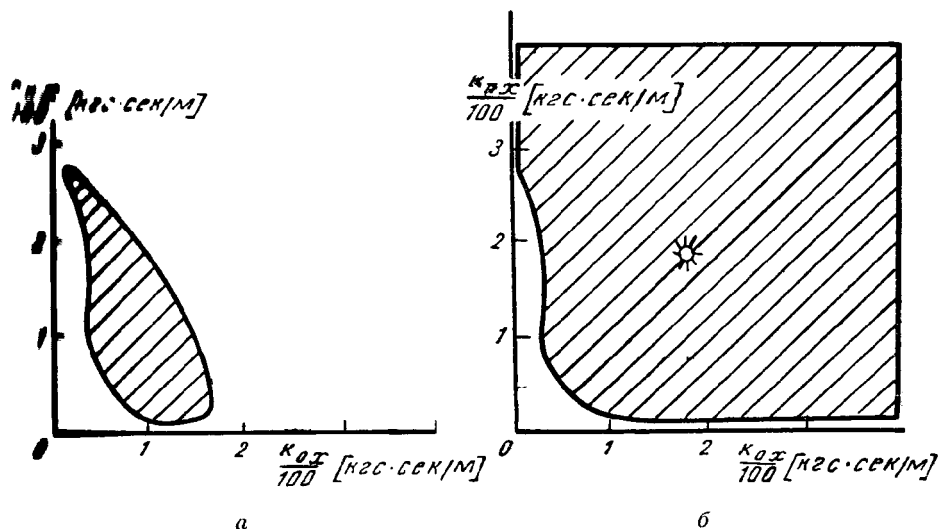
Фиг. 10



Фиг. 11

стания плотности штриховки: за 3, 5 и 8 сек, незатухающие колебания и наконец, колебания, нарастающие после сброса тяги). На фиг. 12 дана область, полученная из предыдущих, в которой для значений $\bar{\omega} = 0,8$; 1; 2 и 1,4 колебания полностью затухают за 3—5 сек при мгновенном сбросе тяги от $0,8 G$ до $0,5 G$. Если не рассматривать $\bar{\omega} = 1,4$, которые обычно не реализуются на вертолете Ми-6, то эта область будет иметь

на, показанный на фиг. 12, б. Существующий коэффициент демпфирования стойки показан на этом графике звездочкой; он лежит внутри области. Все исследования проводились для $\frac{c_a}{c_n} = 0,4$. Видимо, для больших значений c_a/c_n область оптимальных значений передвинется в сторону меньших n .



Фиг. 12

ВЫВОДЫ

1. Разработан метод исследования автоколебаний вертолетов на приближке с отрывом пневматиков от земли, основанный на применении вычислительных машин непрерывного действия к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений движения.

2. Как бы ни был велик запас по числам оборотов до зоны неустойчивости земного резонанса, соответствующей второму тону поперечных колебаний вертолета без отрыва пневматиков от земли, всегда возможны затухающие автоколебания вертолета с подпрыгиванием на пневматиках.

3. Амплитуда колебаний вертолета с подпрыгиванием ограничена; при неработающих амортизационных стойках она линейно зависит от величины веса и тяги ($G - T$), при работе амортизационных стоек с силой предварительного давления P_0 амплитуда автоколебаний обращается в нуль, когда $G - T \approx 2P_0$, т. е. когда статическая нагрузка на шасси примерно равна силе предварительного давления в стойке.

4. Уменьшение силы начального давления в стойке в n раз приводит к уменьшению в n раз амплитуды автоколебаний и диапазона $n = 7$, где эти автоколебания возможны.

5. Наиболее опасной в смысле земного резонанса является самоотталкивающая посадка вертолета с медленным сбросом тяги.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗЕМНОГО РЕЗОНАНСА ВЕРТОЛЕТА ПРИ ОТРЫВЕ ПНЕВМАТИКОВ ОТ ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ БОКОВОЙ ЖЕСТКОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ ПНЕВМАТИКА

Г. В. ВРОНСКИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Приведено решение задачи о земном резонансе вертолета на пробеге с отрывом пневматиков от земли с учетом конечной боковой жесткости и демпфирования пневматика для исследования влияния этих параметров на земной резонанс при различных скоростях пробега вертолета.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим колебания вертолета с отрывом пневматика от земли, приняв следующие допущения:

- 1) центр тяжести вертолета находится на оси вращения винта, и продольная ось вертолета является главной осью инерции;
- 2) со стороны винта на вертолет действует сила тяги, направление которой при колебаниях совпадает с осью вращения винта;
- 3) колебания предполагаются малыми;
- 4) амортизационные стойки располагаются вертикально, и боковая сила создается только за счет обжатия пневматика.

При этих предположениях колебания вертолета можно представить как колебания некоторого плоского тела, стоящего на шасси, имеющего массу M и момент инерции I , с тремя степенями свободы: смещение центра тяжести вертолета по вертикали (y), поворот относительно главной оси инерции (ϑ), смещение центра тяжести по горизонтали (x) (фиг. 1).

Связь шасси с землей — освобождающая, т. е. в шасси могут возникать силы, отличные от нуля, только тогда, когда оно соприкасается с землей (условие подпрыгивания).

Будем считать, что жесткость и демпфирование пневматика линейны. Введем следующие обозначения:

- b — половина колеи шасси,
 l — расстояние от земли до центра тяжести вертолета,
 h — расстояние от втулки винта до центра тяжести вертолета,
 T — тяга винта,
 G — вес вертолета,

F_1, F_2 — вертикальные силы в шасси (соответственно, левая и правая),

N_1, N_2 — горизонтальные силы в шасси (соответственно, левая и правая),
 $c_{yп}$ — вертикальная жесткость пневматика,
 $k_{yп}$ — коэффициент вязкого трения пневматика при вертикальных перемещениях,
 $c_{xп}$ — боковая жесткость пневматика,
 $k_{xп}$ — коэффициент вязкого трения пневматика при горизонтальных перемещениях.

Будем считать, что $y = 0$ в положении статического обжатия шасси, т. е. поместим начало координат в положение центра тяжести вертолета при статическом обжатии. Ось Oy направим вертикально вниз.

Уравнения колебаний вертолета (без втулки) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I\ddot{\vartheta} &= bF_{л} - bF_{п} + (N_{л} + N_{п})l, \\ M\ddot{y} &= G - T + F_{л} + F_{п}, \\ M\ddot{x} &= N_{л} + N_{п} - T\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предположим временно, что амортизационные стойки отсутствуют. Тогда смещение центра тяжести вертолета за счет обжатия пневматика будет:

$$y_0 = \frac{G - T}{2c_{yп}}. \quad (2)$$

Условия подпрыгивания для вертикальных сил выразятся так:

$$F_j = 0; \quad j = 1; 2.$$

Тогда будем иметь:

Для левой ноги $F_1 = -c_{yп}(y + y_0 + b\vartheta) - k_{yп}(\dot{y} + b\dot{\vartheta}),$ $N_1 = -c_{xп}x_1 - k_{xп}\dot{x}_1;$ $F_1 = N_1 = 0.$	При выполнении одного из следующих условий: $\left. \begin{aligned} c_{yп}(y + y_0 + b\vartheta) + k_{yп}(\dot{y} + b\dot{\vartheta}) &> 0; \\ y + y_0 + b\vartheta &> 0; \end{aligned} \right\}$ $\left. \begin{aligned} c_{yп}(y + y_0 + b\vartheta) + k_{yп}(\dot{y} + b\dot{\vartheta}) &\leq 0, \\ y + y_0 + b\vartheta &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$
Для правой ноги $F_2 = -c_{yп}(y + y_0 - b\vartheta) - k_{yп}(\dot{y} - b\dot{\vartheta}),$ $N_2 = -c_{xп}x_2 - k_{xп}\dot{x}_2;$ $F_2 = N_2 = 0.$	При выполнении одного из следующих условий: $\left. \begin{aligned} c_{yп}(y + y_0 - b\vartheta) + k_{yп}(\dot{y} - b\dot{\vartheta}) &> 0, \\ y + y_0 - b\vartheta &> 0; \end{aligned} \right\}$ $\left. \begin{aligned} c_{yп}(y + y_0 - b\vartheta) + k_{yп}(\dot{y} - b\dot{\vartheta}) &\leq 0, \\ y + y_0 - b\vartheta &\leq 0, \end{aligned} \right\}$

где x_1 и x_2 — боковое смещение, соответственно, левого и правого пневматиков.

Боковое смещение пневматика складывается из поступательного смещения вертолета вдоль оси Ox и крена относительно оси, проходящей через центр тяжести.

Естественно предположить, что в воздухе боковое смещение пневматика равно нулю и пневматик начинает обжиматься лишь в момент соприкосновения с землей (t_0):

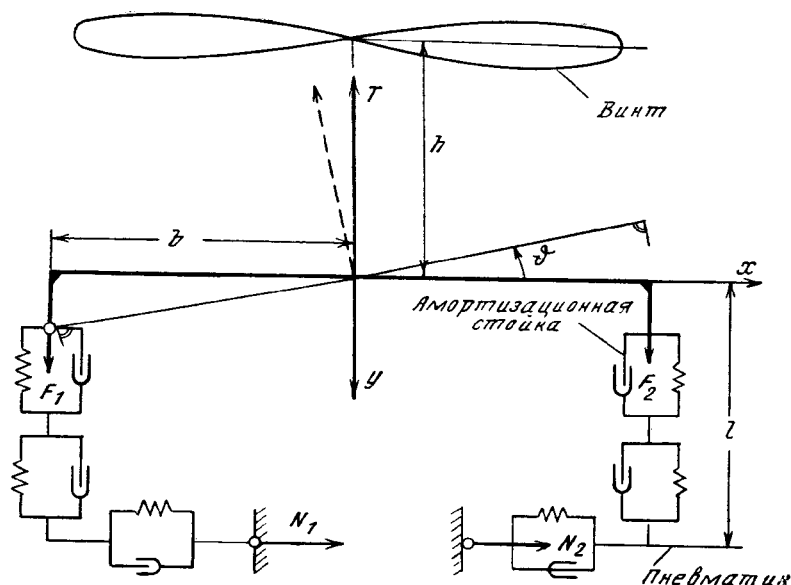
$$x_j = \left\{ \begin{aligned} &\int_{t_0}^t \dot{x}_{к.т} dt + \int_{t_0}^t l\dot{\vartheta} dt \text{ (на земле),} \\ &0 \text{ (в воздухе);} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$j = 1; 2.$

Напишем также выражение для скорости обжатия пневматика:

$$\dot{x}_j = \begin{cases} \dot{x}_{ц.т} + l\dot{\vartheta} & (\text{на земле}), \\ 0 & (\text{в воздухе}). \end{cases} \quad (5)$$

Для того, чтобы определить боковую жесткость и коэффициент демпфирования пневматика, рассмотрим уравнение М. В. Келдыша для



Фиг. 1

бокового движения пневматика на пробеге с использованием гипотезы увода [3]:

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{\eta} V + \dot{\lambda}, \quad (6)$$

где x — боковое смещение диаметральной плоскости колеса,

λ — боковая деформация пневматика, т. е. расстояние между диаметральной плоскостью колеса и точкой пневматика, которая была центром площадки контакта до боковой деформации (фиг. 2),

V — скорость пробега вертолета,

η — коэффициент увода, приближенно равный радиусу недеформированного пневматика.

Будем считать, что боковое смещение колеса при отрыве пневматиков от земли имеет вид, представленный на фиг. 3. Результаты расчета, представленные ниже на фиг. 21—23, подтверждают это предположение,

Полученные решения для x при различных значениях параметров убеждают нас в правильности такого предположения.

Решением однородного уравнения увода

$$\dot{\lambda} + \frac{V}{\eta} \lambda = 0 \quad (7)$$

является

$$\lambda = A e^{-\frac{V}{\eta} t}. \quad (8)$$

Будем искать решение неоднородного уравнения (6) в виде

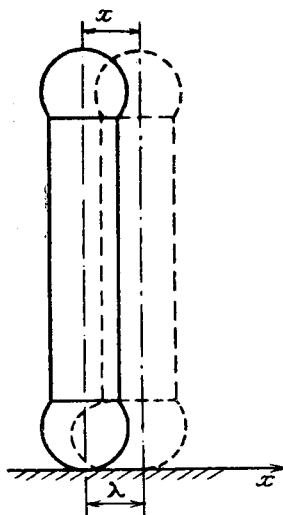
$$\lambda(t) = A(t) e^{-\frac{V}{\eta} t}. \quad (8^*)$$

Так как нас интересует поведение пневматика лишь на земле, имеем при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$:

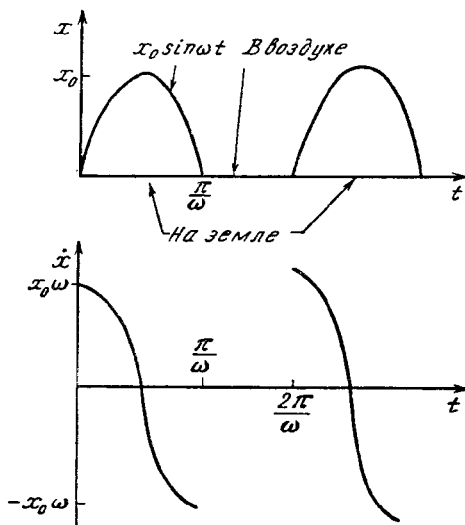
$$\dot{A}(t) e^{-\frac{V}{\eta} t} = \dot{x}(t); \quad (9)$$

$$A(t) = \int_0^t \dot{x} e^{\frac{V}{\eta} t} dt = \omega x_0 \int_0^t \cos \omega t e^{\frac{V}{\eta} t} dt; \quad (9a)$$

$$\lambda(t) = \frac{\omega x_0}{\left(\frac{V}{\eta}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{V}{\eta} \cos \omega t + \omega \sin \omega t - \frac{V}{\eta} e^{-\frac{V}{\eta} t} \right). \quad (10)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Боковая деформация пневматика λ , представленная выражением (10), является суммой трех слагаемых. С точностью до множителей слагаемое, имеющее множителем $\sin \omega t$ в (10), представляет собой эффективную жесткость пневматика в предположении синусоидальности колебаний [3], член с множителем $\cos \omega t$ — коэффициент демпфирования пневматика. Член с множителем $e^{-\frac{V}{\eta} t}$ возникает за счет подпрыгивания. Если разложить этот множитель в ряд Фурье с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, то свободный член, выражающий начальную боковую деформацию пневматика, не будет влиять на характер деформации. Член с $\cos \omega t$ будет выражать добавочное демпфирование и член с $\sin \omega t$ — добавочную жесткость (более высокие гармоники будут мало влиять на деформацию):

$$\left. \begin{aligned}
 e^{-\frac{V}{\eta}t} &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \dots; \\
 a_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-\frac{V}{\eta}t} \cos \omega t dt = \frac{\frac{V}{\omega\eta}}{\pi \left[\left(\frac{V}{\omega\eta} \right)^2 + 1 \right]} (1 - e^{-\frac{V}{\eta} \frac{2\pi}{\omega}}); \\
 b_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-\frac{V}{\eta}t} \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi \left[\left(\frac{V}{\omega\eta} \right)^2 + 1 \right]} (1 - e^{-\frac{V}{\eta} \frac{2\pi}{\omega}}).
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Между боковой силой P_x и боковой деформацией λ существует соотношение:

$$P_x = c_{x_0} \lambda, \quad (12)$$

где c_{x_0} — боковая жесткость при отсутствии качения.

Таким образом, выражение для боковой силы в первом приближении будет состоять из двух слагаемых: одно из них опережает по фазе смещение обода на 90° , а другое находится с ним в фазе:

$$P_x = c_{x_0} \frac{\omega x_0}{\left(\frac{V}{\eta} \right)^2 + \omega^2} \left[\frac{V}{\eta} (1 - a_1) \cos \omega t + \omega \left(1 - \frac{V}{\omega\eta} b_1 \right) \sin \omega t \right]. \quad (13)$$

Первое слагаемое, деленное на ωx_0 , назовем коэффициентом демпфирования пневматика k_x во время его соприкосновения с землей при качении с подпрыгиванием. Второе слагаемое, деленное на x_0 , назовем жесткостью пневматика c_x во время его соприкосновения с землей при качении с подпрыгиванием.

Таким образом,

$$c_x = \frac{1 - \frac{V}{\omega\eta} b_1}{1 + \left(\frac{V}{\omega\eta} \right)^2} c_{x_0}, \quad (14)$$

$$k_x = \frac{\frac{V}{\omega\eta} (1 - a_1)}{1 + \left(\frac{V}{\omega\eta} \right)^2} \frac{c_{x_0}}{\omega}. \quad (15)$$

Легко видеть, что при $a_1 = b_1 = 0$, т. е. при отсутствии подпрыгивания, формулы (14) и (15) преобразуются в обычные формулы для жесткости и коэффициента демпфирования при боковом уводе, приведенные в [3].

Введем новые переменные, представляющие собой вертикальные перемещения левой и правой ног шасси:

$$\left. \begin{aligned}
 y_1 &= y + b\vartheta, \\
 y_2 &= y - b\vartheta.
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Тогда система (1) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \Delta g + \left(1 + \frac{Mb^2}{I}\right) F_1 + \left(1 - \frac{Mb^2}{I}\right) F_2 + \frac{lb}{I} (N_1 + N_2), \\ \ddot{y}_2 &= \Delta g + \left(1 + \frac{Mb^2}{I}\right) F_2 + \left(1 - \frac{Mb^2}{I}\right) F_1 - \frac{lb}{I} (N_1 + N_2), \\ \ddot{x} &= \frac{N_1 + N_2}{M} - \frac{T}{M}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} F_j &= -\frac{c_{yn}}{M} y_j - \frac{k_{yn}}{M} \dot{y}_j - \frac{c_{yn}}{M} y_0, \\ N_j &= -c_{xn} x_j - k_{xn} \dot{x}_j. \end{aligned}$$

$$F_j = N_j = 0$$

При выполнении одного из условий:

$$-\frac{c_{yn}}{M} y_j - \frac{k_{yn}}{M} \dot{y}_j - \frac{c_{yn}}{M} y_0 < \frac{G - T}{2M},$$

$$y_j + y_0 > 0.$$

При выполнении одного из условий:

$$-\frac{c_{yn}}{M} y_j - \frac{k_{yn}}{M} \dot{y}_j - \frac{c_{yn}}{M} y_0 \geq \frac{G - T}{2M},$$

$$y_j + y_0 \leq 0 \quad (j = 1; 2);$$

здесь $\Delta g = \frac{G - T}{M}$ — ускорение вертолета под действием силы тяжести и при противодействии силы тяги.

Учтем теперь работу амортизатора на вертикальных перемещениях. Шасси будем теперь схематизировать в виде двух элементов, представляющих собой пружины с демпфером: амортизационной стойки и пневматика (см. фиг. 1 и 4). Амортизационная стойка представляет собой пружину с предварительной затяжкой P_0 и демпфер. Внутренние опоры,двигающиеся вместе с амортизационной стойкой, имитируют ограничители в реальной стойке.

Условие равновесия сил, действующих на шасси, будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} P_0 + c_a S + k_a S &= c_{yn} z + k_{yn} \dot{z} \\ \text{при } c_{yn} z + k_{yn} \dot{z} &> P_0; \\ S &= 0 \\ \text{при } c_{yn} z + k_{yn} \dot{z} &\leq P_0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

и всегда $S \geq 0$ — условие ограничения хода стойки; здесь z — обжатие пнев-

матика, S — обжатие амортизатора.

Полное обжатие шасси складывается из обжатий амортизатора и пневматика:

$$y + y_0 = z + S. \quad (19)$$

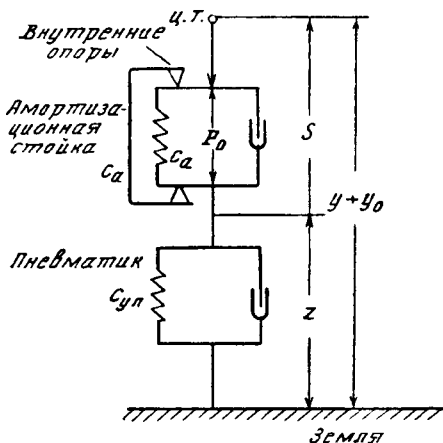
Исключим из уравнений (18) и (19) обжатие пневматика:

$$P_0 + c_a S + k_a \dot{S} = c_{yn} (y + y_0 - S) + k_{yn} (\dot{y} - \dot{S}) \quad (20)$$

при

$$c_{yn} (y + y_0 - S) + k_{yn} (\dot{y} - \dot{S}) > P_0,$$

и всегда $S \geq 0$.



Фиг. 4

При работающих амортизационных стойках выражения для сил изменяются, так как в уравнения (17) нужно вместо y подставить $y - S$.

Перейдем к безразмерному времени τ и размерным координатам, вводя следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= q_2 t; \\ \bar{x} &= \frac{x q_2^2}{g}; \\ \bar{y} &= \frac{y q_2^2}{g}; \\ \bar{S} &= \frac{S q_2^2}{g}; \\ \bar{c}_x &= \frac{c_{x \text{ п}}}{c_{y \text{ п}}}; \\ 2\bar{k}_x &= \frac{k_{x \text{ п}} q_2}{c_{y \text{ п}}}; \\ 2\bar{n}_a &= \frac{k_a q_2}{c_{y \text{ п}}}; \\ 2\bar{n}_n &= \frac{k_{y \text{ п}} q_2}{c_{y \text{ п}}}; \end{aligned} \quad \begin{aligned} q_2^2 &= \frac{c_{y \text{ п}}}{M} \left(1 - \frac{M b^2}{I} \right); \\ \bar{q}_1^2 &= \frac{\frac{M b^2}{I} - 1}{\frac{M b^2}{I} + 1}; \\ \bar{q}_3^2 &= \frac{\frac{l b}{I} M}{1 + \frac{M b^2}{I}}; \\ \bar{q}_x^2 &= \frac{1}{1 - \frac{M b^2}{I}}; \\ \bar{q}_T^2 &= \frac{q - \Delta q}{2 b q_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Знак „штрих“ означает дифференцирование по τ .

При этом для производных мы будем иметь следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}' &= \frac{d\bar{y}}{d\tau}; \\ y &= \frac{g}{q_2^2} \bar{y}; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{g}{q_2} \bar{y}'; \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= g \bar{y}''; \\ \dot{\eta}_1 &= q_2 \eta_1'; \\ \ddot{\eta}_1 &= q_2^2 \eta_1''. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Уравнения (17) запишутся тогда следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1'' &= \Delta \bar{g} + \bar{f}_1 - \bar{q}_1^2 \bar{f}_2 + \bar{q}_3^2 (\bar{n}_1 + \bar{n}_2), \\ \bar{y}_2'' &= \Delta \bar{g} + \bar{f}_2 - \bar{q}_1^2 \bar{f}_1 + \bar{q}_3^2 (\bar{n}_1 + \bar{n}_2), \\ \bar{x}'' &= \bar{q}_x^2 (\bar{n}_1 + \bar{n}_2) - \bar{q}_T^2 (\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j &= -\bar{y}_j - \bar{y}_0 + \bar{S}_j - 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j'), \\ \bar{n}_j &= -\bar{c}_x \bar{x}_j - 2\bar{k}_x \bar{x}_j'; \\ \bar{f}_j &= \bar{n}_j = 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &\text{при } \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') > \bar{y}_0 \\ &\text{и } \bar{y}_j > \bar{y}_0; \\ &\text{при } \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \leq -\bar{y}_0 \\ &\text{и } \bar{y}_j \leq -\bar{y}_0. \end{aligned} \right. \right\}$$

При этом безразмерное боковое обжатие пневматика, входящее в (23), получается из уравнений (5) и имеет вид:

$$\bar{x}_{j\text{п}} = \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\tau_{0j}}^{\tau} \bar{x}'_{j\text{п}} d\tau & (\text{на земле}), \\ 0 & (\text{в воздухе}); \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$j = 1; 2;$$

где τ_{0j} — безразмерный момент времени, когда j -й пневматик коснулся земли. Если τ превысит некоторую величину τ_j^* , при которой пневматик оторвется от земли, то полагаем $\bar{x}_j = \bar{x}'_j = 0$.

Нужно отметить, что $\bar{x}''$, входящее в уравнение (23), представляет собой безразмерное боковое ускорение центра тяжести вертолета, в то время как $\bar{x}_j$ — боковое обжатие, а $\bar{x}'_j$ — боковое ускорение j -го пневматика, так как именно эти величины входят в уравнение для боковой силы в пневматике ($\bar{n}_j$).

Уравнение (20) представляется в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{y}^* + \frac{c_a}{c_{y\text{п}}} \bar{S}_j + 2\bar{n}_a \bar{S}'_j = \bar{y}_j + \bar{y}_0 - \bar{S}_j + 2\bar{n}_\text{п} (\bar{y}'_j - \bar{S}'_j) \\ \text{при} \\ \bar{y}_j + \bar{y}_0 - \bar{S}_j + 2\bar{n}_\text{п} (\bar{y}'_j - \bar{S}'_j) > \bar{y}^*, \\ \text{где} \\ y^* = \frac{P_0 q_2^2}{g c_{y\text{п}}}; \\ \bar{S}_j = 0 \text{ при } \bar{y}_j + \bar{y}_0 - \bar{S}_j + 2\bar{n}_\text{п} (\bar{y}'_j - \bar{S}'_j) \leq \bar{y}^*, \end{array} \right\} \quad (25)$$

и всегда $\bar{S}_j = 0$.

До сих пор мы считали, что винт отсутствует.

Рассмотрим движение центра тяжести втулки ротора при вращении и его связь с колебаниями фюзеляжа вертолета.

Уравнения собственных колебаний ротора в предположении линейности демпфера будут иметь вид [2]:

$$\left. \begin{array}{l} \eta'' + 2\bar{n}_\text{л} \eta' - \bar{\omega}^2 (1 - \nu_0^2) \eta - 2\bar{\omega} \zeta' - 2\bar{n}_\text{л} \bar{\omega} \zeta = 0, \\ \zeta'' + 2\bar{n}_\text{л} \zeta' - \bar{\omega}^2 (1 - \nu_0^2) \zeta + 2\bar{\omega} \eta' + 2\bar{n}_\text{л} \bar{\omega} \eta = 0, \end{array} \right\} \quad (26)$$

где знак „штрих“ обозначает, как и прежде, дифференцирование по τ ;

$\bar{\omega} = \frac{\omega}{q_2}$ — безразмерная угловая скорость вращения ротора;

ω — угловая скорость вращения винта;

$2\bar{n}_\text{л} = \frac{k_\text{л}}{q_2 I_{\text{в. ш}}}$ — безразмерный коэффициент демпфирования колебаний лопасти относительно вертикального шарнира (здесь $k_\text{л}$ — характеристика демпфера лопасти);

$I_{\text{в. ш}}$ — момент инерции лопасти относительно вертикального шарнира.

Колебания фюзеляжа, связанные с перемещением втулки в плоскости вращения винта, приводят к появлению инерционных сил, действующих на ротор в направлении Ox :

$$F_{\text{ин}} = \frac{k}{2} S_\text{л} \ddot{x}_\text{р}, \quad (27)$$

где x_p — перемещение втулки ротора в плоскости вращения, вызванное поворотом вертолета около центра тяжести и смещением его вдоль оси Ox ;

$$x_p = -\frac{h}{2b}(y_1 - y_2) + x_{ц.т.}; \quad (28)$$

S_{λ} — статический момент массы лопасти относительно вертикального шарнира,

k — число лопастей.

В то же время со стороны втулки на вертолет действует инерционная сила

$$F_{ин} = S\ddot{\eta}. \quad (29)$$

Приводя полученные члены связи к безразмерному виду, из уравнений (23) — (29) окончательно получим следующую систему уравнений, описывающую совместные колебания фюзеляжа вертолета и лопастей:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1'' &= \Delta \bar{g} + \bar{f}_1 - \bar{q}_1^2 \bar{f}_2 + \bar{q}_3^2 (\bar{n}_1 + \bar{n}_2) - \bar{\varepsilon}_{\eta}^y \eta'', \\ \bar{y}_2'' &= \Delta \bar{g} + \bar{f}_2 - \bar{q}_2^2 \bar{f}_1 - \bar{q}_3^2 (\bar{n}_1 + \bar{n}_2) + \bar{\varepsilon}_{\eta}^y \eta'', \\ \bar{x}'' &= \bar{q}_x^2 (\bar{n}_1 + \bar{n}_2) + \bar{q}_7^2 (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + \bar{\varepsilon}_{\eta}^x \eta''; \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j &= -\bar{y}_j - \bar{y}_0 + \bar{S}_j - 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j'), \\ \bar{n}_j &= -\bar{c}_x \bar{x}_j - 2\bar{k}_x \bar{x}_j' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') > -\bar{y}_0 \\ &\text{и } \bar{y}_j + \bar{y}_0 > 0; \end{aligned} \quad (30б)$$

$$\bar{f}_j = \bar{n}_j = 0 \quad \text{при } \bar{y}_j - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \leq -\bar{y}_0 \text{ или } \bar{y}_j \leq -\bar{y}_0; \quad (30в)$$

$$\bar{x}_j = \begin{cases} \int_{\tau_{0j}}^{\tau} \bar{x}_{jn} d\tau & (\text{на земле}) \\ 0 & (\text{в воздухе}); \end{cases}$$

здесь τ_{0j} — время касания земли j -м пневматиком;

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{jn}' &= \bar{x}_{ц.т.}' + \frac{b}{2b} (\bar{y}_1' - \bar{y}_2'), \\ \bar{y}^* + \frac{c_a}{c_{vн}} \bar{S}_j + 2\bar{n}_a \bar{S}_j' &= \bar{y}_j + \bar{y}_0 - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \\ &\text{при } \bar{y}_j + \bar{y}_0 - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') > \bar{y}^*; \\ \bar{S}_j &\geq 0 \text{ при } \bar{y}_j + \bar{y}_0 - \bar{S}_j + 2\bar{n}_n (\bar{y}_j' - \bar{S}_j') \leq \bar{y}^*, \end{aligned} \right\} \quad (30г)$$

и всегда $\bar{S}_j \geq 0$;

$$\left. \begin{aligned} \eta'' + 2\bar{n}_{\lambda} \eta' - \bar{\omega}^2 (1 - v_0^2) \eta - 2\bar{\omega} \zeta' - 2\bar{n}_{\lambda} \bar{\omega} \zeta + \bar{\varepsilon}_{\eta}^y (\bar{y}_1'' - \bar{y}_2'') - \bar{\varepsilon}_{\eta}^x \bar{x}'' &= 0, \\ \zeta'' + 2\bar{n}_{\lambda} \zeta' - \bar{\omega}^2 (1 - v_0^2) \zeta + 2\bar{\omega} \eta' + 2\bar{n}_{\lambda} \bar{\omega} \eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30д)$$

В этих уравнениях введены дополнительные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{\eta}^y &= \frac{k}{4} \frac{S_{\lambda}}{I_{в.ш}} \frac{gh}{q_2^2 b}; \quad \bar{\varepsilon}_{\eta}^y = \frac{bh S_{\lambda} q_2^2}{Ig}; \\ \bar{\varepsilon}_{\eta}^x &= \frac{k}{2} \frac{S_{\lambda}}{I_{в.ш}} \frac{g}{q_2^2}; \quad \bar{\varepsilon}_{\eta}^x = \frac{S_{\lambda} q_2^2}{Mg}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Система уравнений (30) была набрана на работающих совместно электронных моделирующих машинах. Блок-схема представлена на фиг. 5. Колебательные контуры 4 моделируют колебания центра тяжести ротора, контуры 1 — вертикальные перемещения центра тяжести вертолета и его поворот относительно оси вращения, колебательный контур 2 — горизонтальное обжатие пневматиков, причем реле P1 и P2, замыкая на землю выходы интегрирующих блоков при отсутствии соприкосновения с землей, имитируют условия подпрыгивания. Так как большое число реле плохо отражается на работе схемы, то моделировали не оба условия подпрыгивания в (30б) (геометрическое и силовое), а лишь одно, представляющее некоторое среднее между ними ($\bar{y}_j + \bar{y}_0 - \bar{S}_j > 0$). Колебательные цепочки 3 с включенными в них реле моделируют боковые силы в пневматиках при подпрыгивании, а цепочки 5 — вертикальные силы в шасси, где детекторы Д1 и Д2 выражают условие положительности силы в стойках; контуры 6 — уравнения обжатия амортизационных стоек. Цепочки 7 и 8 являются вспомогательными, нужными для питания реле и измерения вертикальных перемещений вертолета.

Как было отмечено в [1], масштаб системы (30) определяется соотношением $y^*/\Delta g$, а при неработающих стойках ($y^* = \infty$) только Δg . Поэтому при решении мы задавались $\Delta \bar{g} = 0,01$ и изменяли y^* и начальные условия.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Земной резонанс с подпрыгиванием при неработающих стойках

$$(P_0 = \infty)$$

Этот случай был исследован при произвольных значениях боковой жесткости и демпфирования. В качестве начальных условий принимался лишь крен вертолета относительно центра тяжести, т. е. $\bar{y}_1 = -\bar{y}_2$, и центр тяжести вертолета находился в том же положении, что при статическом состоянии, когда на вертолет по вертикали действует сила, равная $G - T$.

На фиг. 6 приведены результаты расчета при $\frac{T}{G} = 0,894$. Определялись: 1) величина порога возбуждения (штрихи направлены вниз), 2) амплитуда устойчивого предельного цикла, 3) положение границы возбуждения (штрихи идут вверх), выше которой колебания не возбуждаются и затухают до нуля.

Согласно высказанному замечанию относительно линейности системы (30) ясно, что перечисленные зависимости от T/G будут прямыми, проходящими через точки $\left[\frac{T}{G} = 1; (y_1 - y_2) = 0 \right]$ и $\left[\frac{T}{G} = 0,894; (y_1 - y_2) \right]$.

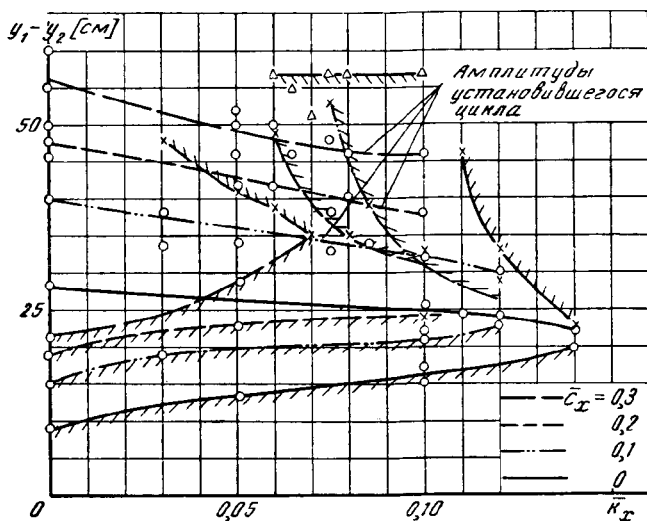
При колебаниях с подпрыгиванием частота будет существенно зависеть от амплитуды. При возрастании амплитуды пневматики большее время находятся в воздухе, и, следовательно, осредненная по времени жесткость и, соответственно, частота падают. Зона неустойчивости колебаний по второму тону, которая в данном случае находилась выше рабочих чисел оборотов, при некоторой начальной амплитуде может передвинуться в зону рабочих чисел оборотов. Эта амплитуда и будет порогом возбуждения.



Фиг. 5

Из фиг. 6 видно, что при возрастании боковой жесткости величина порога возбуждения и амплитуда установившегося цикла возрастают. Физически это объясняется тем, что для того, чтобы попасть в зону неустойчивости по второму тону, нужно задать вертолету тем большую амплитуду колебаний, чем больше собственная жесткость шасси, чтобы пневматики большее время находились в воздухе и осредненная по времени жесткость шасси падала.

При возрастании демпфирования наблюдается уменьшение амплитуды предельного цикла, что объясняется уменьшением собственной частоты вертолета ($\omega_1^2 = \omega^2 - \delta^2$).



Фиг. 6

Казалось бы, что порог возбуждения при этом тоже должен уменьшиться, но он возрастает, что можно объяснить следующим. При увеличении демпфирования все меньшая часть начальной потенциальной энергии, запасенной в шасси вертолета, будет переходить в энергию колебания и все большая часть непосредственно перейдет в тепло. Следовательно, для возбуждения колебаний необходима большая энергия.

В работе мы столкнулись с фактом, необъяснимым с точки зрения нелинейной теории колебаний с одной степенью свободы, а именно: при некоторых начальных отклонениях, превышающих порог возбуждения, наблюдалось затухание колебаний до нуля. Физически это можно объяснить так. Если начальная амплитуда не слишком велика, то мы наблюдаем последовательное переваливание вертолета с одной ноги на другую. Но при слишком больших начальных отклонениях существенную роль будет играть также перемещение вертолета по вертикали. Вертолет еще не успевает оторвать одну ногу, как касается земли второй ногой. После этого, получив дополнительный импульс вверх, он совсем отрывается от земли. Колебания носят неравномерный характер: относительно малое время вертолет находится на земле и значительно большее время в воздухе. Осреднять по времени жесткость здесь уже нельзя.

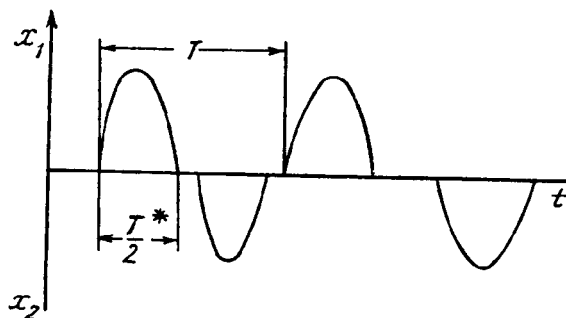
Таким образом, в воздухе вертолет имеет нулевую собственную частоту, ниже частоты рабочих чисел оборотов, а на земле, когда прижаты обе ноги, собственная частота выше рабочих чисел оборотов.

В результате того, что зона неустойчивости не попадает в диапазон рабочих чисел оборотов, колебания затухают, причем чем больше боковое демпфирование, тем быстрее при колебаниях вертолет касается земли обоими пневматиками одновременно, в силу чего колебания затухают. Этим объясняется спад кривой границы возбуждения по демпфированию.

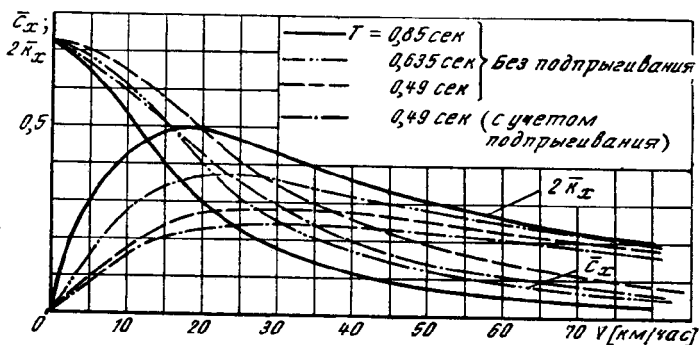
Отметим, что при большой боковой жесткости появляется верхняя граница, выше которой колебания снова возбуждаются.

При коэффициенте демпфирования $\bar{k}_x > 0,15$ колебания вообще не возникают.

При моделировании земного резонанса было обнаружено, что колебания происходят с приблизительно постоянной частотой.



Фиг. 7



Фиг. 8

В дальнейшем при учете работы амортизатора было замечено, что частота и в этом случае сохраняется постоянной.

Характер боковых смещений при подпрыгивании имеет вид, приведенный на фиг. 7.

Период колебаний T при различных жесткостях и коэффициентах демпфирования и установившихся колебаниях сохранял постоянное значение, равное $\sim 0,85—0,87$ сек. Но в начальный момент T изменялся довольно значительно в зависимости от начальных условий. Наблюдались T^* до $0,5$ сек.

На фиг. 8 приведены различные жесткости и коэффициенты демпфирования с учетом и без учета подпрыгивания (считалось, что в начальный момент обжатие пневматика изменяется синусоидально), вычисленные по формулам (14) и (15).

Так как в данной схеме не учитывалась работа стойки при горизонтальных перемещениях, можно предположить, что в действитель-

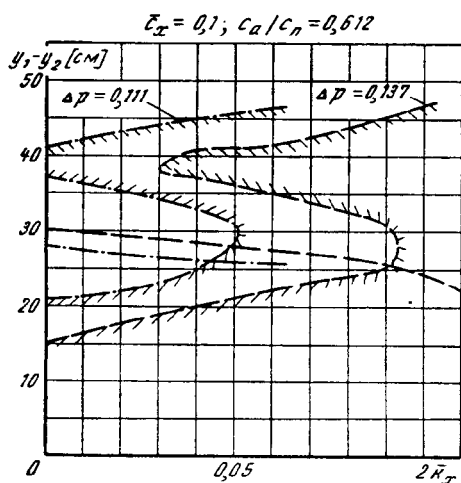
ности наблюдаются несколько заниженная боковая жесткость и повышенное боковое демпфирование по сравнению с нашей схемой. Следовательно, можно ожидать возникновение земного резонанса лишь при малых скоростях пробега, причем с довольно значительным порогом возбуждения.

Отметим, что значения жесткости и коэффициента демпфирования были получены в предположении отсутствия проскальзывания пневматика относительно земли. В случае проскальзывания они должны значительно понизиться, что может привести, в свою очередь, к появлению земного резонанса.

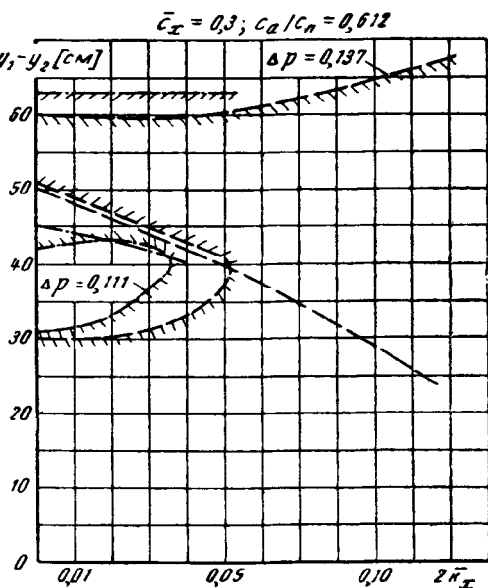
Земной резонанс с подпрыгиванием при включенных стойках

Вначале земной резонанс был исследован при $\frac{T}{G} = 0,894$ для различных значений предварительной затяжки и жесткости амортизационной стойки.

На фиг. 9—11 представлены значения ($y_1 - y_2$) порога возбуждения, y_1, y_2 [см]



Фиг. 9



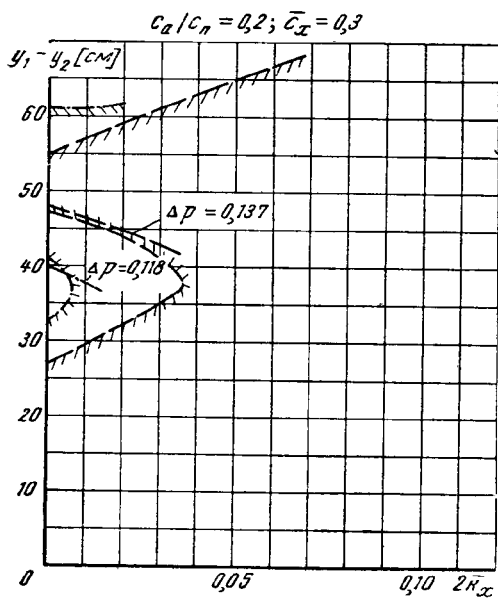
Фиг. 10

установившегося цикла и границы зоны возбуждения по демпфированию в пневматике. При уменьшении предварительной затяжки в стойке порог возбуждения возрастает, а амплитуда установившегося цикла падает, что объясняется увеличением общего демпфирования в шасси вертолета.

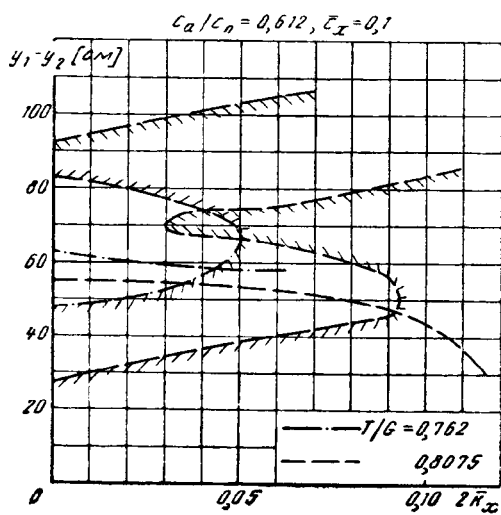
Из этих же графиков путем пересчета были построены соответствующие кривые для предварительной затяжки, равной 0,25G (фиг. 12—14).

Самым неблагоприятным режимом, способствующим возникновению земного резонанса, является малое боковое демпфирование в пневматике. Практически это может произойти при проскальзывании пневматика по земле. По-видимому, это и привело к земному резонансу одного из вертолетов, когда аэродром был покрыт слоем грязи толщиной в несколько сантиметров.

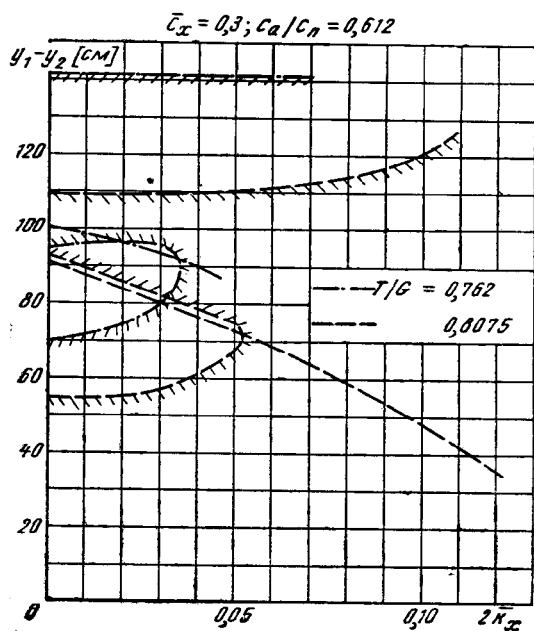
С целью выявления влияния боковой жесткости пневматика и сопоставления с результатами, полученными в [1], были построены кривые порога возбуждения и установившегося цикла по тяге при нулевом



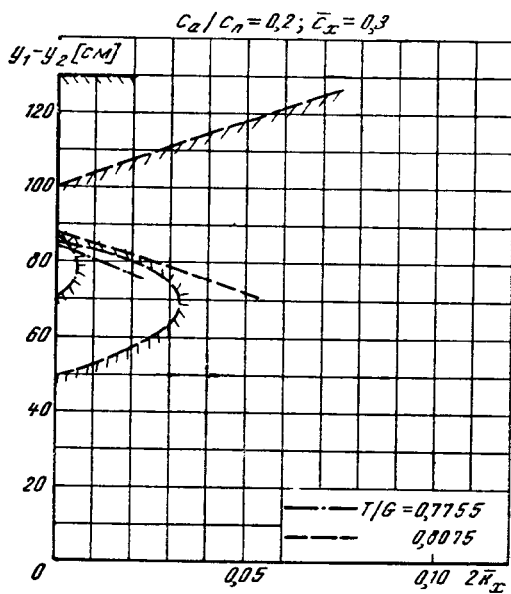
Фиг. 11



Фиг. 12

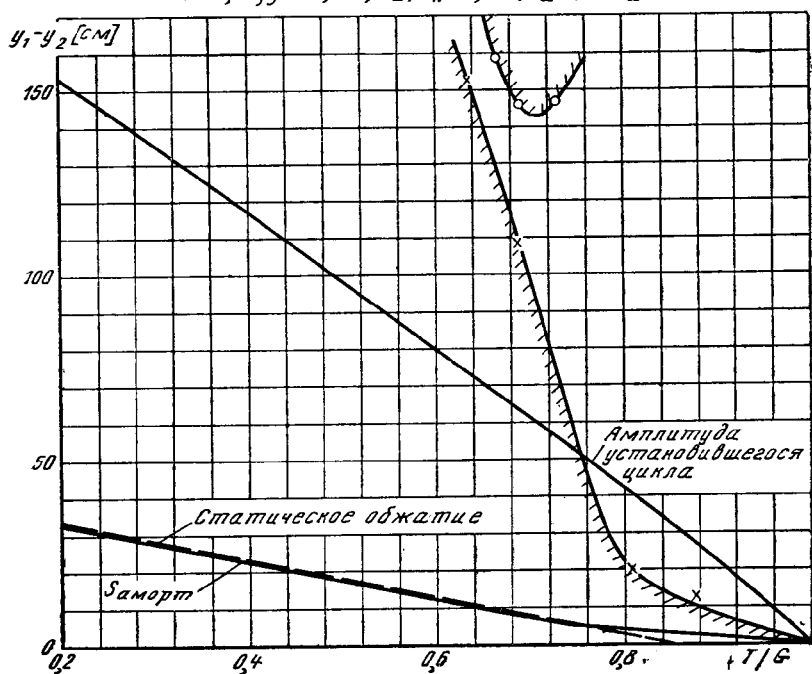


Фиг. 13



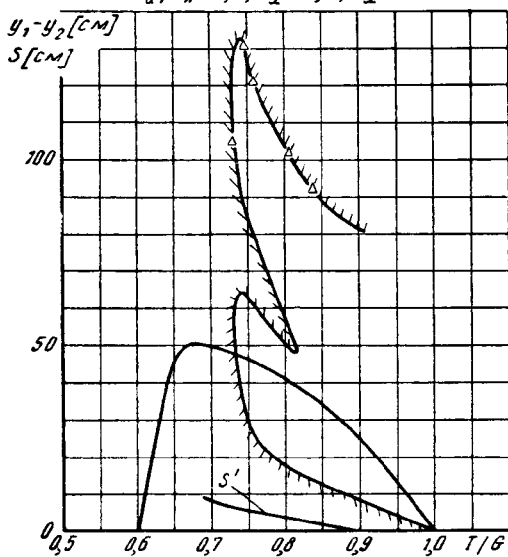
Фиг. 14

$$\bar{\omega} = 1,15; \bar{y}^* = 0,101; c_a/c_n = 0,512; \bar{c}_x = 0,5; \bar{K}_x = 0$$



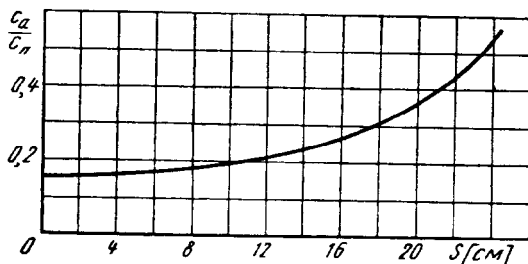
Фиг. 15

$$c_a/c_n = 0,2; \bar{c}_x = 0,5; \bar{K}_x = 0$$



Фиг. 16

боковом демпфировании (начальная затяжка принималась равной $0,25G$). Результаты приведены на фиг. 15 и 16 для $\frac{c_a}{c_n} = 0,612$ и $0,2$ соответственно. На фиг. 17 представлена диаграмма осредненного отношения $\frac{c_a}{c_n}$ от амплитуды обжатия, взятая из [1].



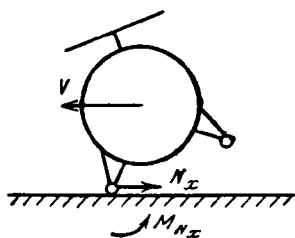
Фиг. 17

Влияние бокового сноса и высоты выравнивания вертолета над землей перед посадкой на зону возбуждения

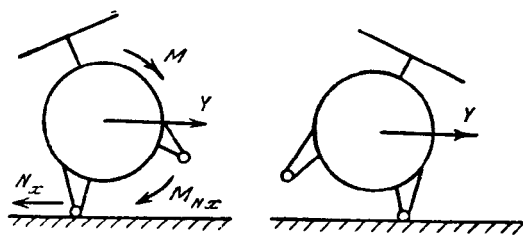
Влияние бокового сноса при посадке на зону возбуждения было исследовано на режиме $\frac{T}{G} = 0,8075$ ($P_0 = 0,25G$; $\frac{c_a}{c_n} = 0,2$; $\bar{c}_x = 0,3$; $2\bar{k}_x = 0,01$).

Было обнаружено, что при наличии бокового сноса возможны колебания как с обычной частотой по второму тону, так и с меньшей частотой. При наличии достаточного крена могут возникнуть колебания по второму тону, если боковой снос невелик. При увеличении боковой скорости зона возбуждения сужается в виде клина. Это объясняется следующим.

Если снос происходит в сторону крена, то после касания с землей в шасси возникает боковая сила, момент от которой направлен против момента от силы веса (фиг. 18).



Фиг. 18

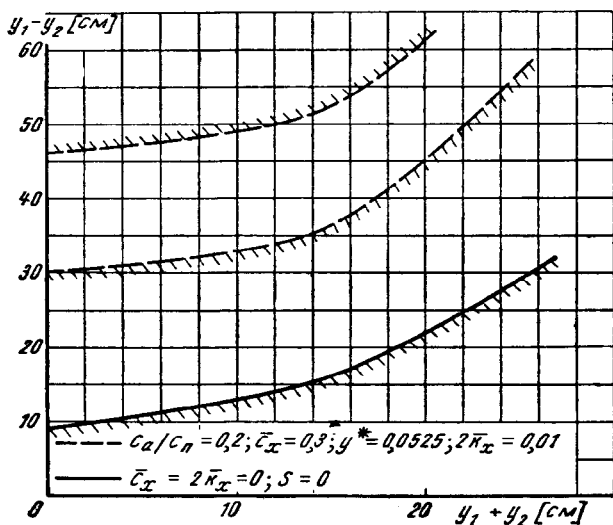


Фиг. 19

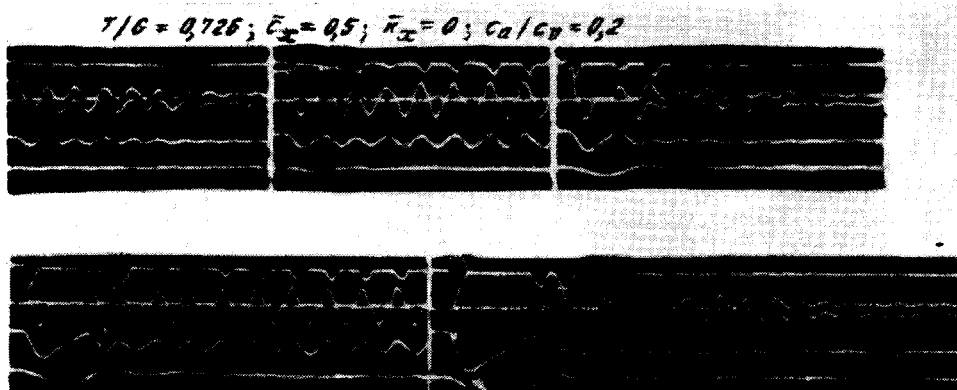
Если снос происходит в сторону, противоположную крену, то после начального толчка вертолет поворачивается относительно центра тяжести, продолжая двигаться в ту же сторону (фиг. 19). После этого картина аналогична первому случаю, показанному на фиг. 18.

При дальнейшем увеличении боковой скорости можно попасть в следующую зону возбуждения с малой частотой колебаний, которую мы условно назовем зоной возбуждения по первому тону.

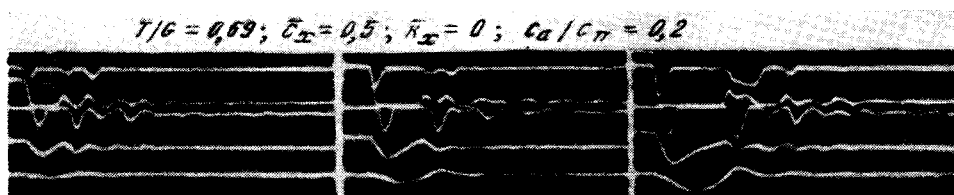
Дело в том, что в отличие от обычно рассматриваемой схемы мы имеем три степени свободы вместо двух и, соответственно, три частоты



Фиг. 20



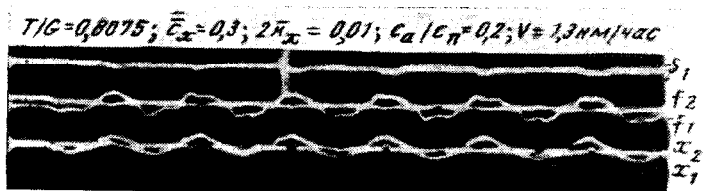
Фиг. 21



Фиг. 22

собственных колебаний. При этом вертолет поворачивается относительно точки соприкосновения колеса с землей, в силу чего момент инерции вертолета относительно этой точки существенно уменьшается по сравнению с моментом инерции вертолета по первому тону колебаний, когда узел колебаний находится ниже уровня земли.

Мы наблюдали колебания с периодом $T=2,2$ сек. При боковой скорости, превышающей для данного случая $3,5$ км/час, возникают недопустимо большие амплитуды, которые могут привести к опрокидыванию вертолета.



Фиг. 23

Было проведено также исследование влияния высоты выравнивания вертолета над землей перед посадкой на зону возбуждения. Результаты расчета приведены на фиг. 20, из которой видно, что порог и граница возбуждения возрастают приблизительно одинаково как при включенной, так и при отключенной стойке по высоте выравнивания. На фиг. 21—23 приведены полученные осциллограммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белозеров А. Н. Земной резонанс вертолета с отрывом пневматиков от земли (см. стр. 42 настоящего сборника).
2. Жеребцов Б. Я. Динамическая устойчивость несущего винта вертолета с учетом упругости его опоры. В сб. работ по теоретическому исследованию явления „земной резонанс“ вертолета. Изд. БНИ ЦАГИ, 1966.
3. Гродко Л. Н. Земной резонанс вертолета на пробеге (см. стр. 28 настоящего сборника).

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ШАССИ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ ЕГО ХАРАКТЕРИСТИК ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ О ЗЕМНОМ РЕЗОНАНСЕ ВЕРТОЛЕТА

А. Н. БЕЛОЗЕРОВ, Б. М. ЛИТВАКОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследуется зависимость демпфирования и жесткости шасси от амплитуды колебаний. Рассматриваются случаи, когда амортизатор имеет сухое трение и гидравлическое сопротивление, в одном случае пропорциональное первой степени скорости, а в другом случае пропорциональное квадрату скорости.

Применение полученных результатов для расчета земного резонанса иллюстрируется примерами.

ВВЕДЕНИЕ

Вертолет как колебательная система имеет существенно нелинейные характеристики как в элементах винта, так и в опоре (шасси). Обычно при расчетах вертолета на земной резонанс все нелинейные элементы заменяются „эквивалентными“ линейными, так как теория земного резонанса для нелинейных систем недостаточно разработана.

Не касаясь в данной работе вопроса о линеаризации характеристик винта, исследуем возможность замены нелинейных характеристик шасси эквивалентными линейными. Такое исследование является тем более необходимым, что прямое экспериментальное определение динамических характеристик шасси сопряжено с большими трудностями. В настоящее время при исследовании и доводке шасси ограничиваются экспериментальным определением параметров изолированного амортизатора.

Методы получения динамических характеристик шасси по параметрам амортизатора, применявшиеся до сих пор, дают, как это будет показано в работе, большие ошибки. В настоящей работе вводятся такие характеристики, которые, с одной стороны, достаточно хорошо описывают роль шасси с нелинейным амортизатором при автоколебаниях вертолета и, с другой стороны, позволяют применить выводы линейной теории земного резонанса. Этими характеристиками являются эквивалентная жесткость и эквивалентное демпфирование шасси, которые вследствие нелинейности зависят от частоты и амплитуды колебаний.

Эквивалентная жесткость и демпфирование шасси определяются при гармоническом законе суммарного обжатия шасси, складывающегося из обжатия амортизатора и обжатия пневматика, как для реальных вертолетов на границе устойчивости.

Никаких дополнительных условий на обжатие амортизатора шасси не накладывается. В приближенных методах, применявшихся до сих пор, накладывалось условие гармонического обжатия амортизатора, что не соответствует истинной картине работы амортизатора.

В работе учитывается сухое (фрикционное) и гидравлическое сопротивление амортизатора. Подробно исследуются случаи, когда сила гидравлического сопротивления пропорциональна первой степени скорости и квадрату скорости обжатия амортизатора. Согласно современным представлениям, гидравлическое сопротивление в амортизаторах определяется в основном линейной (вязкой) и квадратичной (турбулентной) составляющими, поэтому изученные случаи дают достаточно полную картину явления.

Коэффициент демпфирования шасси, а следовательно, и устойчивость вертолета при фрикционно-гидравлическом трении в стойке зависит (в отличие от случая линейного амортизатора) от амплитуды колебаний. Поэтому здесь приходится говорить не об устойчивости вертолета при определенных числах оборотов (см., например, [1], [2]), а о диапазоне амплитуд для тех же чисел оборотов, при которых колебания вертолета устойчивы или неустойчивы.

В работе определены диапазоны устойчивости для одного из типов вертолетов. Способ графического представления некоторых результатов, полученных в работе, сообщен авторам Л. Н. Гродко.

§ 1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Простейшая схема шасси, к которой могут быть сведены и другие более сложные схемы, изображена на фиг. 1. Пневматик через шток приводит в движение поршень амортизатора. Полное обжатие шасси z равно сумме обжатия пневматика y и амортизатора s . При обжатии пневматика возникают сила реакции, зависящая от обжатия по закону, близкому к линейному, и гистерезисные силы, вызванные поглощением энергии при деформации резины и корда.

При малых деформациях пневматик можно заменить линейной пружиной с жесткостью c_n (фиг. 2), определяемой как угол наклона к кривой статического обжатия пневматика, и демпфером, который, как показано, например в [3], может рассматриваться как линейный с коэффициентом демпфирования k_n , зависящим от частоты обжатия.

Согласно экспериментам, для большинства пневматиков приведенный коэффициент демпфирования пневматика

$$2\bar{n}_n = \frac{k_n q}{c_n} \approx 0,1,$$

где q — частота колебаний.

При обжатии амортизатора возникают сила сопротивления воздуха, сила гидравлического сопротивления и сила сухого трения в манжетах и буксах.

Сила сопротивления воздуха зависит только от величины обжатия. Демпфирующие силы гидравлического и сухого трения зависят от скорости обжатия амортизатора и направлены противоположно скорости. Демпфирующие силы могут зависеть от величины обжатия, однако в настоящей работе эта зависимость не учитывается.

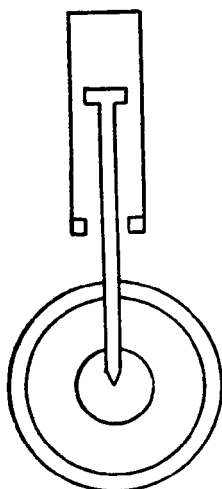
Силу воздушного сопротивления $P_{a. \text{возд}}$ заменяем пружиной, жесткость которой c_a при малых перемещениях можем считать постоянной. Демпфирующие силы амортизатора заменяем нелинейным демпфером, присоединенным параллельно пружине.

Зависимость силы f_a в этом амортизаторе от скорости обжатия $\dot{s}$ показана на фиг. 3. Разрыв кривой при $\dot{s}=0$ определяется сухим трением.

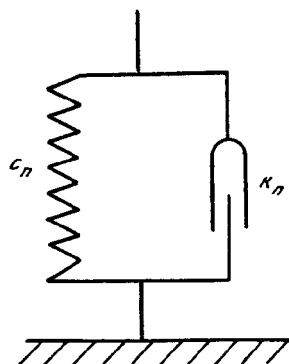
Выведем уравнения обжатия шасси. Схема его дана на фиг. 4.

Рассмотрим колебания шасси относительно положения равновесия. Из условия равновесия амортизатора имеем:

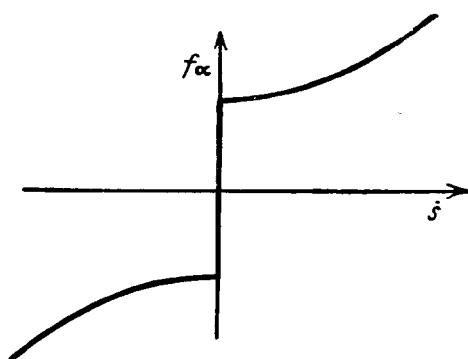
$$P = c_a s + f_a. \quad (1)$$



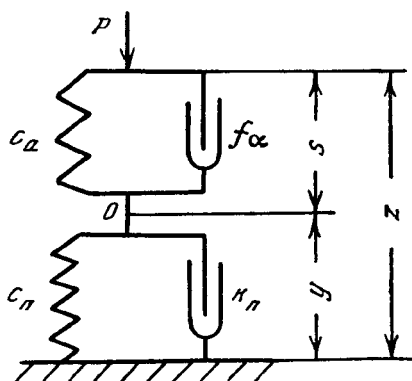
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Из условия равновесия сил, действующих в точке O , соответствующей поршню реальной стойки, получим

$$P = c_n y + k_n \dot{y}. \quad (2)$$

Кинематическое условие связывает y и s с общим обжатием шасси:

$$z = y + s. \quad (3)$$

Исключив из уравнений P и y , получим уравнение обжатия амортизатора:

$$k_n (\dot{z} - \dot{s}) + c_n (z - s) = c_a s + f_a. \quad (4)$$

На границе устойчивости колебания вертолета должны быть периодическими.

Рассмотрение физической картины колебаний вертолета показывает, что величина обжатия шасси z должна изменяться по закону, близкому к гармоническому. Задавая обжатие шасси в виде

$$z = z_0 \cos qt,$$

можно найти из уравнения (4) $s = s(t)$.

Зная $s(t)$, можем получить силу, действующую на шасси. Это и будет та сила, которая необходима, чтобы шасси обжималось по гармоническому закону.

Закон $z(t)$ может быть уточнен только при решении задачи о земном резонансе вертолета на нелинейном шасси в целом.

Как перейти от этой силы к эквивалентным линейным характеристикам шасси, эквивалентной жесткости и эквивалентному демпфированию, покажем на примере шасси с чисто линейным амортизатором, для которого $f_a = k_a s$. Этот случай был впервые исследован Хорвеем [4]. Если пренебречь демпфированием в пневматике, уравнение (4) переписется для случая Хорвея в виде:

$$k_a \dot{s} (c_a + c_n) s = c_n z, \quad (4a)$$

где

$$z = z_0 \cos qt.$$

Переходя для удобства к комплексной форме

$$z = z_0 e^{iqt},$$

ищем решение в виде

$$s = s_0 e^{iqt},$$

где s_0 — комплексная величина, равная из уравнения (4a)

$$s_0 = \frac{z_0}{\frac{ik_a q}{c_n} + \frac{c_a + c_n}{c_n}}.$$

Сила, с помощью которой системе сообщаются колебания, выразится в виде:

$$P = c_a s + k_a \dot{s} = (c_a s_0 + ik_a s_0) e^{iqt} = \\ = \left[\frac{\frac{c_a(c_a + c_n)}{c_n} + \frac{(k_a q)^2}{c_n}}{\left(\frac{c_a + c_n}{c_n}\right)^2 + \left(\frac{k_a q}{c_n}\right)^2} + \frac{ik_a q}{\left(\frac{c_a + c_n}{c_n}\right)^2 + \left(\frac{k_a q}{c_n}\right)^2} \right] z_0 e^{iqt}.$$

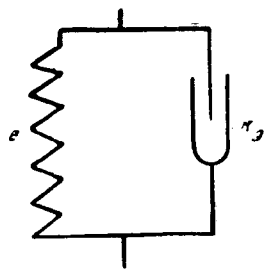
Используя соотношения $z_0 e^{iqt} = z$; $z_0 i q e^{iqt} = \dot{z}$, получаем:

$$P = \frac{\frac{c_a(c_a + c_n)}{c_n^2} + \left(\frac{q k_a}{c_n}\right)^2}{\left(\frac{c_a + c_n}{c_n}\right)^2 + \left(\frac{q k_a}{c_n}\right)^2} c_n z + \frac{k_a}{\left(\frac{c_a + c_n}{c_n}\right)^2 + \left(\frac{k_a q}{c_n}\right)^2} \dot{z}. \quad (5)$$

Для системы, состоящей из параллельно включенных пружины и демфера (фиг. 5), сила выражается через смещение и скорость следующим образом:

$$P = c_s z + k_s \dot{z}. \quad (6)$$

Из сравнения выражений (5) и (6) видно, что коэффициенты, стоящие при z и $\dot{z}$ в выражении (5), имеют смысл эквивалентной жесткости и эквивалентного демпфирования шасси в целом:



Фиг. 5

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= c_n \frac{\frac{c_a(c_a + c_n)}{c_n^2} + \left(\frac{k_a q}{c_n}\right)^2}{\left(\frac{c_a + c_n}{c_n}\right)^2 + \left(\frac{k_a q}{c_n}\right)^2}, \\ k_3 &= \frac{k_a}{\left(\frac{c_a + c_n}{c_n}\right)^2 + \left(\frac{k_a q}{c_n}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Несмотря на то, что эти выражения получены для идеализированной схемы шасси, они позволяют установить ряд важных качественных результатов.

Во-первых, с ростом коэффициента демпфирования амортизатора демпфирование шасси сначала увеличивается, достигает максимума, равного

$$k_{3 \max} = \frac{1}{2} \frac{c_n^2}{q(c_n + c_a)},$$

а затем уменьшается и при $k_a \rightarrow \infty$ величина $k_3 \rightarrow 0$.

Уменьшение демпфирования шасси при больших k_a связано с тем, что при увеличении демпфирования амортизатор как бы запирается.

Во-вторых, жесткость шасси с ростом k_a изменяется от $c_3 = \frac{c_a c_n}{c_a + c_n}$, соответствующей $k_a = 0$, до $c_3 = c_n$, соответствующей $k_a \rightarrow \infty$.

Формулы (7) позволяют также оценить влияние параметров q , c_a , c_n на жесткость и демпфирование шасси.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНОГО ШАССИ

Рассмотренный в предыдущем разделе случай Хорвея имеет тот существенный недостаток, что в нем использовано представление об амортизаторе как о линейной системе, в то время как амортизатор реального шасси из-за наличия сухого трения — система существенно нелинейная. Однако простота полученных результатов вызвала у многих исследователей стремление приспособить их для расчета реальных шасси. С этой целью вводился такой условный коэффициент k_a , чтобы при гармоническом обжатии амортизатора за цикл поглощалась та же работа, что и в случае реальной стойки.

Характеристики шасси вычислялись по формулам Хорвея.

До настоящего времени такой метод, применявшийся без всякого теоретического обоснования, был единственным. Недостатки этого метода связаны с тем, что истинный закон изменения скорости далек от гармонического и к тому же изменяется с амплитудой.

Подобный метод вследствие указанных причин приводит к значительным количественным ошибкам и качественно неверному выводу, что максимум демпфирования шасси с фрикционной стойкой равен максимуму демпфирования линейного шасси. На самом деле он примерно в 1,5 раза меньше (см. ниже фиг. 13).

В настоящей работе характеристики демпфирования и жесткости

шасси определяются без каких-либо предположений о законе обжатия амортизатора. В этом случае $s(t)$ приходится находить из уравнений (4).

Шасси сводится также к системе параллельно включенных линейных пружин и демпфера с характеристиками, зависящими от частоты и амплитуды; эквивалентные характеристики определяются не по формуле Хорвея, а из равенства энергий, поглощенных эквивалентным и реальным шасси.

Запишем уравнения обжатия эквивалентного шасси, состоящего из пружины с жесткостью c_3 и демпфера с коэффициентом k_3 :

$$P_3 = c_3 z + k_3 \dot{z}. \quad (8)$$

Работа, поглощенная эквивалентной системой за период, равна

$$E_3 = \int_0^T P_3 dz = c_3 \int_0^T z dz + k_3 \int_0^T \dot{z} dz.$$

Для периодического z интеграл $\int_0^T z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_0^T = 0$.

Работа, поглощенная за период реальным шасси, равна:

$$E = \int_0^T P dz = \int_0^T P \dot{z} dt.$$

Приравнявая работы, поглощаемые эквивалентной и реальной системами,

$$E_3 = E,$$

получаем выражение для k_3 :

$$k_3 = \frac{\int_0^T P \dot{z} dt}{\int_0^T \dot{z}^2 dt}. \quad (9)$$

Выражение для эквивалентной жесткости c_3 также найдем методом энергетического баланса [5].

Ввиду аналогии между механическими и электрическими колебаниями, используем применяемое в электротехнике понятие реактивной мощности.

Допустим, что имеется некоторое тело, находящееся под воздействием силы $P(t)$ и совершающее периодические колебания.

Реактивной мощностью назовем выражение вида $\frac{1}{T} \int_0^T P \dot{z} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt$.

Приравнявая выражения реактивных мощностей реальной и эквивалентной систем, получим коэффициент эквивалентной жесткости:

$$c_3 = \frac{\int_0^T P \dot{z} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt}{\int_0^T \dot{z} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt};$$

для чисто гармонического z это выражение переходит в

$$c_3 = \frac{\int_0^T Pz dt}{\int_0^T z^2 dt} . \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) будем считать определением эквивалентной жесткости и эквивалентного демпфирования шасси.

Подставим в эти формулы принятое нами выражение для z :

$$z = z_0 \cos qt,$$

тогда коэффициент эквивалентного демпфирования

$$k_3 = \frac{-\int_0^T Pz_0 q \sin qt dt}{\int_0^T q^2 z_0^2 \sin^2 qt dt} = \frac{-\frac{1}{\pi} \int_0^T P \sin qt d(qt)}{qz_0} , \quad (11)$$

а эквивалентная жесткость

$$c_3 = \frac{\int_0^T Pz_0 \cos qt dt}{\int_0^T z_0^2 \cos^2 qt dt} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^T P \cos qt d(qt)}{z_0} . \quad (12)$$

Интегралы в числителе формул (11) и (12) представляют собой составляющие первой гармоники силы. Введем безразмерные коэффициенты $\bar{k}_3$, $\bar{c}_3$, которые нам будут необходимы в дальнейшем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_3 &= \frac{k_3 q (c_a + c_n)}{c_n^2} = \frac{(c_a + c_n) \frac{1}{\pi} \int_0^T P \sin qt d(qt)}{c_n^2 z_0} , \\ \bar{c}_3 &= \frac{c_3}{c_n} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^T P \cos qt d(qt)}{c_n z_0} . \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Рассмотрение нелинейного шасси начнем с наиболее простого случая, когда в амортизаторе имеется только сухое трение.

Случай, когда в амортизаторе имеется только сухое трение

Особенности системы с сухим трением связаны с тем, что величина сухого трения, в отличие от гидравлического, не стремится к нулю при уменьшении скорости. На фиг. 6 дана типичная зависимость силы сухого трения от скорости.

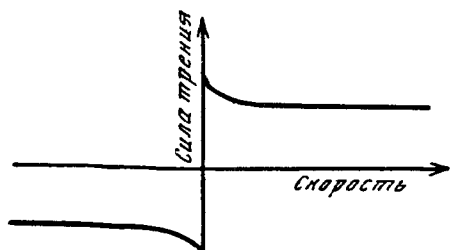
Простейшая идеализация, которая может быть сделана в случае сухого трения — это предположение, принятое Кулоном, а именно: трение по величине не зависит от скорости (фиг. 7). Такая идеализация выявляет основные особенности шасси с сухим трением, и мы ею ограничимся.

Определим динамические характеристики шасси для этого случая сухого трения в амортизаторе.

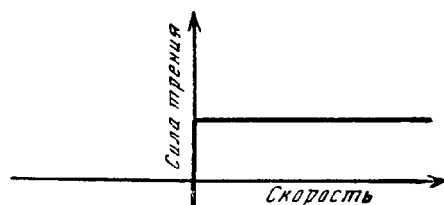
Уравнения обжатия шасси примут вид:

$$\left. \begin{aligned} c_n z_0 \cos \tau - s(c_n + c_a) &= P_{тр} & \text{при } s > 0, \\ c_n z_0 \cos \tau - s(c_n + c_a) &= -P_{тр} & \text{при } s < 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где $\tau = qt$.



Фиг. 6



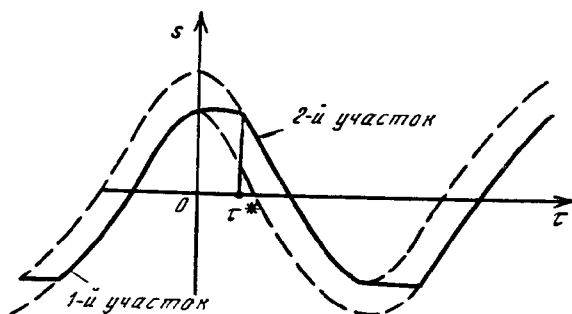
Фиг. 7

К этим уравнениям необходимо добавить условие „заедания“ амортизатора. Если силы, действующие на амортизатор, меньше величины сухого трения, то он не будет обжиматься, т. е.

$$s = 0 \quad \text{при} \quad |c_n z - s(c_n + c_a)| < P_{тр}. \quad (15)$$

Решение системы (14) производим по участкам методом припасовывания. Пусть на участке, который мы условно назовем первым, $s > 0$; тогда s будет изменяться в соответствии с первым уравнением системы (14) (фиг. 8):

$$s_1 = \frac{c_n z_0}{c_n + c_a} \cos \tau - \frac{P_{тр}}{c_n + c_a}.$$



Фиг. 8

Максимальное значение s_1 принимает при $\cos \tau = 1$:

$$s_{1 \max} = \frac{c_n z_0}{c_n + c_a} - \frac{P_{тр}}{c_n + c_a}.$$

Скорость $\dot{z}$ в этот момент равна нулю. При дальнейшем изменении z амортизатор не будет обжиматься до тех пор, пока не нарушится условие (15), т. е. до момента, когда выражение $|c_n z \cos \tau^* - s_{\max}(c_n + c_a)|$ не станет равным величине $P_{тр}$, причем в этот момент сила трения будет направлена уже в обратную сторону.

Таким образом, время τ^* , в течение которого стойка остается неподвижной, определится соотношением:

$$\cos \tau^* = 1 - \frac{2P_{\text{тр}}}{c_n z_0}. \quad (16)$$

При дальнейшем изменении z стойка будет обжиматься в соответствии со вторым уравнением системы (14), т. е.

$$s_2 = \frac{c_n z_0 \cos \tau}{c_n + c_a} + \frac{P_{\text{тр}}}{c_n + c_a}.$$

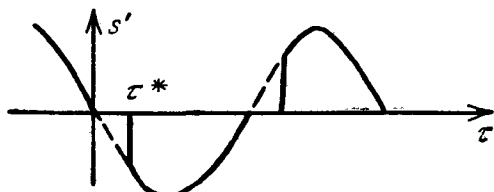
На фиг. 8 показан вид функции $s(\tau)$.

График скорости амортизатора (фиг. 9) представляет собой синусоиду с вырезанными участками, соответствующими зонам „заедания“, где $s' = 0$.

Соотношение (16) показывает, что при уменьшении величины

$\frac{P_{\text{тр}}}{c_n z_0}$ до нуля $\cos \tau^* \rightarrow 1$ и, следовательно, $\tau^* \rightarrow 0$, т. е. зоны „заедания“ исчезают. Наоборот, при $P_{\text{тр}} = c_n z_0$ зона „заедания“ занимает весь период $\cos \tau^* = -1$, $\tau^* = \pi$.

При $P_{\text{тр}} > c_n z_0$ амортизатор вообще не обжимается и колебания происходят только на одном пневматике.



Фиг. 9

Сила P , действующая на шасси, будет:

$$P = c_n(z - s).$$

При $\tau \leq \tau^*$, т. е. когда стойка находится в зоне „заедания“,

$$P = c_n(z - s_{1\text{max}}) = c_n \left(z_0 \cos \tau - \frac{c_n z_0}{c_n + c_a} + \frac{P_{\text{тр}}}{c_n + c_a} \right). \quad (17)$$

Когда стойка обжимается, т. е. при $\tau^* \geq \tau \geq \pi$,

$$\begin{aligned} P &= c_n(z - s_2) = c_n \left(z_0 \cos \tau - \frac{c_n z_0}{c_n + c_a} \cos \tau - \frac{P_{\text{тр}}}{c_n + c_a} \right) = \\ &= c_n \left(\frac{c_a z_0 \cos \tau}{c_n + c_a} - \frac{P_{\text{тр}}}{c_n + c_a} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Сила представляет собой нелинейную функцию; определим ее первую гармонику:

$$P_1 = B_1 \cos \tau + B_2 \sin \tau.$$

Составляющая силы, находящаяся в фазе с перемещением, будет:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P \cos \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau^*} \left(c_n z_0 \cos \tau - \frac{c_n^2 z_0}{c_n + c_a} - \frac{P_{\text{тр}} c_n}{c_n + c_a} \right) \cos \tau d\tau + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\tau^*}^{\pi} \left(\frac{c_a c_n}{c_a + c_n} z_0 \cos \tau - \frac{P_{\text{тр}}}{c_n + c_a} \right) \cos \tau d\tau = \\ &= c_n z_0 + \frac{2 c_n P_{\text{тр}}}{\pi (c_n + c_a)} \sin \tau^* - \frac{c_n^2 z_0 \sin \tau^*}{\pi (c_n + c_a)} - \frac{c_n^2 z_0}{c_n + c_a} \left(1 - \frac{\tau^*}{\pi} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Составляющая силы B_2 , находящаяся в фазе со скоростью перемещения, будет:

$$B_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P \sin \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau^*} \left(c_n z_0 \cos \tau - \frac{c_n^2 z_0}{c_n + c_a} + \frac{P_{тр} c_n}{c_n + c_a} \right) \sin \tau d\tau + \\ + \frac{2}{\pi} \int_{\tau^*}^{\pi} \left(\frac{c_a c_n}{c_n + c_a} z_0 \cos \tau - \frac{P_{тр} c_n}{c_n + c_a} \right) \sin \tau d\tau = \frac{-c_n}{c_n + c_a} \frac{4 P_{тр}}{\pi} \left(1 - \frac{P_{тр}}{c_n z_0} \right). \quad (20)$$

Эквивалентная жесткость и эквивалентный коэффициент демпфирования системы выразятся соответственно как:

$$c_3 = \frac{B_1}{z_0}, \quad k_3 = \frac{-B_2}{z_0}.$$

Введя безразмерные величины $\bar{c}_3$ и $\bar{k}_3$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_3 &= \frac{4}{\pi} \frac{P_{тр}}{c_n z_0} \left(1 - \frac{P_{тр}}{c_n z_0} \right), \\ \bar{c}_3 &= \frac{c_a}{c_a + c_n} + \frac{c_n}{c_a + c_n} \tau^* - \frac{c_n}{\pi (c_a + c_n)} \sin \tau^* \cos \tau^*. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Максимум эквивалентного демпфирования, как это следует из формулы (21), равен $1/\pi$, т. е. в $\pi/2$ раз меньше максимального демпфирования, которое можно получить при линейной стойке.

Из выражений (21) можно исключить параметр $\frac{P_{тр}}{c_n z_0}$, тогда получится формула, непосредственно связывающая эквивалентное демпфирование и жесткость:

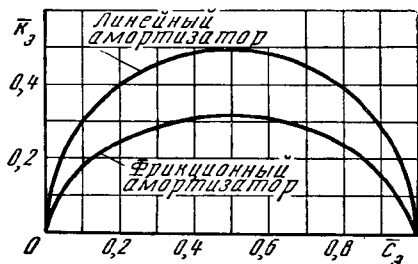
$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_3 &= \frac{c_a}{c_n + c_a} + \frac{c_n}{c_n + c_a} \left[\arcsin \sqrt{\pi \bar{k}_3} - \sqrt{\pi \bar{k}_3 (1 - \pi \bar{k}_3)} \right], \\ c_3 &= 1 - \frac{c_n}{(c_n + c_a) \pi} \left[\arcsin \sqrt{\pi \bar{k}_3} - \sqrt{\pi \bar{k}_3 (1 - \pi \bar{k}_3)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Эта зависимость для $\frac{c_a}{c_n + c_a} = 0$ изображена на фиг. 10.

Из сравнения зависимостей $\bar{k}_3$ ($\bar{c}_3$) для сухого трения и для линейного трения в стойке следует, что при одинаковой эквивалентной жесткости эквивалентное демпфирование шасси с сухим трением меньше, чем с линейным.

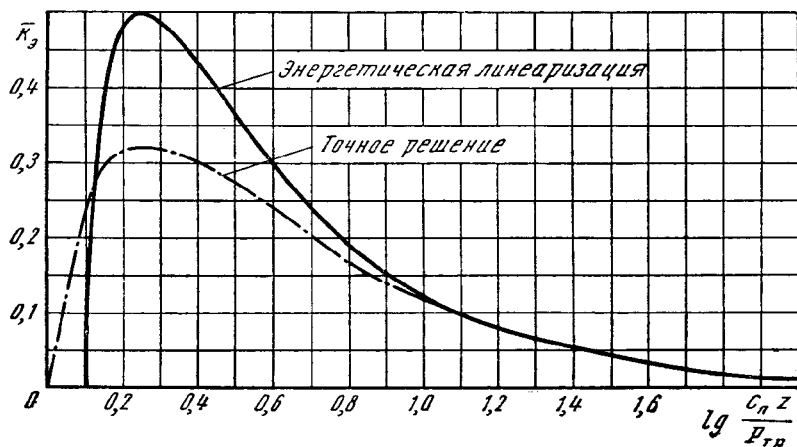
Приближенный метод линеаризации, принимающий гармоническое обжатие амортизатора, дает следующее выражение для демпфирования:

$$\bar{k}_3 = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \bar{z}^2} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \bar{z}^4}}.$$



Фиг. 10

Сравнение этого решения с точным (фиг. 11) показывает, что такой метод для шасси, т. е. системы с двумя степенями свободы, приводит к значительным ошибкам.



Фиг. 11

Случай, когда в амортизаторе имеется сухое и гидравлическое линейное трение

Простейшим видом фрикционно-гидравлического амортизатора является амортизатор с сухим и линейным трением. Для этого амортизатора

$$f_a = \pm P_{\text{тр}} + k_a \dot{s}.$$

Динамические характеристики шасси с фрикционно-линейным амортизатором определим, учитывая демпфирование в пневматике, что для этого случая почти не усложняет решения.

Уравнение обжатия стойки примет вид:

$$c_a s + q k_a s' + P_{\text{тр}} \text{sign } s' = c_n (z - s) + q k_n (z' - s'). \quad (23)$$

Как и для шасси с чисто фрикционной стойкой, решим уравнение (23) методом припасовывания.

Рассмотрим отрезок времени, когда $s' < 0$. Начало этого участка обозначим через τ^* , конец — через τ_m .

Уравнение обжатия шасси для этого участка имеет вид:

$$c_a s + q k_a s' - P_{\text{тр}} = c_n (z - s) + k_n q (z' - s').$$

Учитывая, что $z = z_0 \cos \tau$, получаем:

$$s' + \frac{c_a + c_n}{q(k_a + k_n)} s = z_0 \frac{c_n \cos \tau - q k_n \sin \tau}{q(k_a + k_n)} + \frac{P_{\text{тр}}}{q(k_a + k_n)}. \quad (24)$$

Вводя вместо τ новое переменное τ_1 , связанное с τ соотношением

$$\cos \tau - \frac{q k_n}{c_n} \sin \tau = \cos \tau_1 \sqrt{1 + \frac{q^2 k_n^2}{c_n^2}},$$

и обозначая

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{q(k_a + k_n)}{c_a + c_n}, \\ \bar{z} &= \frac{c_n z_0}{P_{rp}} \sqrt{1 + 4\bar{n}_n^2}, \\ \bar{s} &= \frac{s(c_a + c_n)}{c_n z_0 \sqrt{1 + 4\bar{n}_n^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

приводим уравнение (24) к виду:

$$\bar{s}' + \frac{1}{k} \bar{s} = \frac{1}{k} \left(\cos \tau + \frac{1}{z} \right). \quad (26)$$

Подставляя в формулы (13) величины (25), получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_s &= - \frac{(c_a + c_n) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P \sin \tau d\tau}{c_n^2 z_0} = - \frac{(c_a + c_n) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} c_n (z - s) \sin \tau d\tau}{c_n^2 z_0} = \\ &= 2\bar{n}_n \frac{c_a + c_n}{c_n} + (1 - 4\bar{n}_n^2) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{s} \sin \tau d\tau - \frac{4\bar{n}_n}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{s} \cos \tau d\tau, \\ \bar{c}_s &= \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P \cos \tau d\tau}{c_n z_0} = 1 - \frac{c_n}{\pi(c_a + c_n)} (1 - 4\bar{n}_n^2) \int_0^{2\pi} \bar{s} \cos \tau d\tau - \\ &\quad - \frac{4\bar{n}_n c_n}{\pi(c_a + c_n)} \int_0^{2\pi} \bar{s} \sin \tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Введем для первых коэффициентов разложения s в ряд Фурье обозначения:

$$\bar{s}^I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{s} \sin \tau d\tau,$$

$$\bar{s}^{II} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{s} \cos \tau d\tau.$$

Тогда формулы (27) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_s &= 2\bar{n}_n \frac{c_a + c_n}{c_n} + (1 - 4\bar{n}_n^2) \bar{s}^I - 4\bar{n}_n \bar{s}^{II}, \\ \bar{c}_s &= 1 - \frac{c_n}{c_a + c_n} [(1 - 4\bar{n}_n^2) \bar{s}^{II} + 4\bar{n}_n \bar{s}^I]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Теперь необходимо определить зависимость величин $\bar{s}^I$ и $\bar{s}^{II}$ от безразмерной амплитуды колебаний шасси z . Представим эту зависимость в параметрическом виде, для этого величины $\bar{s}^I$, $\bar{s}^{II}$ и $\bar{z}$ выразим через τ^* и τ_m .

Из условия, что скорость обжатия амортизатора в момент начала заедания τ_m и в момент трогания τ^* равна нулю —

$$\bar{s}'(\tau_m) = \bar{s}'(\tau^*) = 0,$$

получим уравнение, связывающее τ^* и τ_m :

$$\left(-\frac{k}{1+k^2} \cos \tau^* + \frac{1}{1+k^2} \sin \tau^* \right) e^{\frac{-\tau_m - \tau^*}{k}} + \frac{k \cos \tau_m}{1+k^2} - \frac{\sin \tau_m}{1+k^2} = 0.$$

Это уравнение легко решается, если ввести время „заедания“ амортизатора $\delta = \tau_m - \tau^*$. Тогда для вычисления τ_m и τ^* получим аналитические формулы:

$$\left. \begin{aligned} \tau^* &= \arctg k + \arctg \frac{\sin \delta}{e^{-\frac{\delta}{k}} - \cos \delta}, \\ \tau_m &= \tau^* + \delta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Из условия, что силы в амортизаторе в момент остановки и в момент трогания амортизатора равны, соответственно, $P_{тр} = -P_{тр}$, а $s(\tau^*) = -s(\tau_m)$, т. е.

$$c_a \bar{s}(\tau_m) - P_{тр} \equiv c_n [z_0 \cos \tau_m - s(\tau_m)] + k_n q [-z_0 \sin \tau_m],$$

$$c_a \bar{s}(\tau^*) - P_{тр} \equiv c_n [z_0 \cos \tau^* - s(\tau^*)] + k_n q [-z_0 \sin \tau^*],$$

$$\bar{s}(\tau^*) = -\bar{s}(\tau_m),$$

получаем

$$\bar{z} = -\frac{2}{\cos \tau^* + \cos \tau_m}. \quad (30)$$

Подставляя в выражения для s^I и s^{II} значение τ , полученное из решения уравнения (6), имеем:

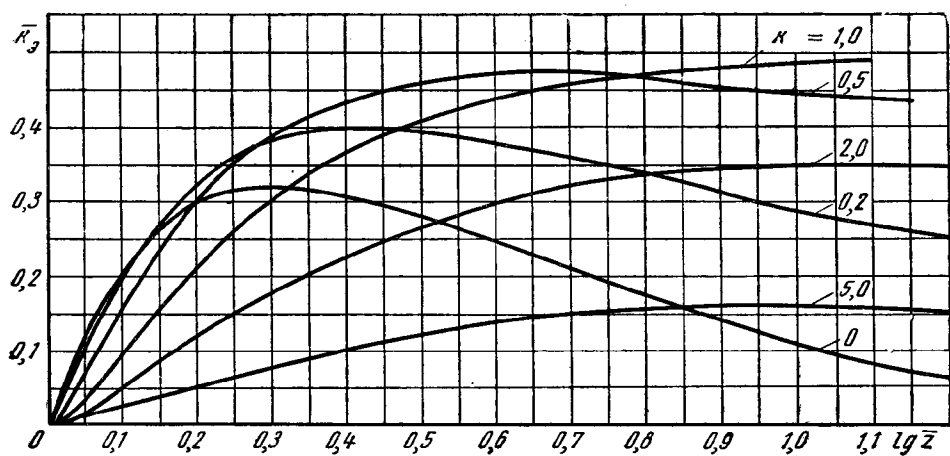
$$\left. \begin{aligned} \bar{s}^I &= \frac{1}{\pi} \frac{k}{1+k^2} \left[\delta - \frac{\sin 2\tau_m - \sin 2\tau^*}{2} + \frac{\cos 2\tau_m - \cos 2\tau^*}{2k} \right], \\ \bar{s}^{II} &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+k^2} \left[\delta - \frac{\sin 2\tau_m - \sin 2\tau^*}{2} + \frac{k(\cos 2\tau_m - \cos 2\tau^*)}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Формулы (28) — (31) позволяют найти $\bar{s}^I$, $\bar{s}^{II}$, а следовательно, $\bar{k}_z$ и $\bar{c}_z$, как функции амплитуды колебаний шасси $\bar{z}$.

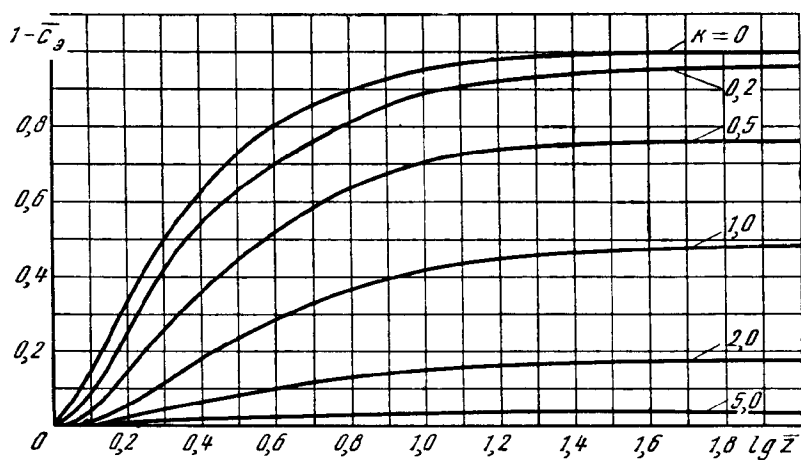
Результаты вычислений $\bar{k}_z$ и $\bar{c}_z$, проведенные без учета демпфирования в пневматике для различных значений k (случай $k=0$ соответствует чисто фрикционной стойке), приведены на фиг. 12—14. На фиг. 14 изображена также зависимость $\bar{k}_z$ ($\bar{c}_z$) шасси с чисто линейным амортизатором (пунктирная кривая). Кривые для шасси с линейно фрикционным амортизатором своими концами лежат на этой кривой. Это значит, что при бесконечно больших значениях $\bar{z}$ фрикционное трение в амортизаторе не оказывает никакого влияния на работу шасси.

Отметим, что при отсутствии демпфирования в пневматике $\bar{k}_z = \bar{s}^I$, т. е. зависимости, приведенные на фиг. 12 и 13, можно использовать для вычисления $\bar{k}_z$ и $\bar{c}_z$ с учетом демпфирования в пневматике. Для этого нужно воспользоваться формулами (28).

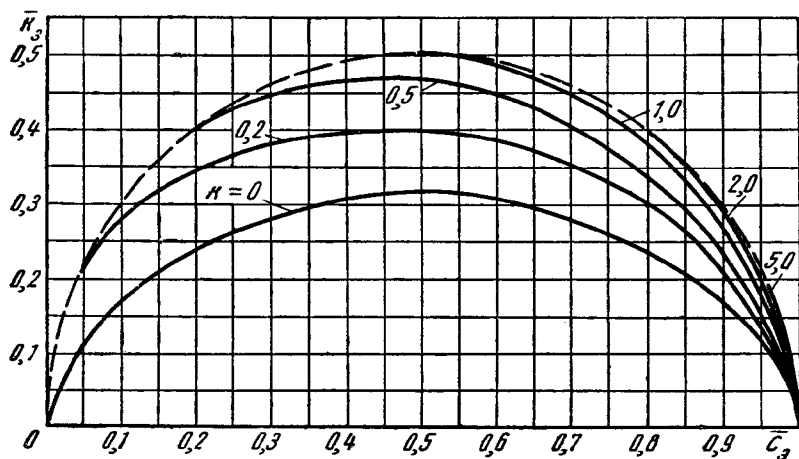
Проанализируем влияние характеристик демпфирования в амортизаторе на динамические характеристики шасси в целом.



Фиг. 12



Фиг. 13



Фиг. 14

Коэффициент линейного демпфирования k_a входит в окончательные формулы лишь в виде безразмерного параметра

$$k = \frac{q k_a}{c_n}.$$

При увеличении этого параметра от нуля до $\sim 0,5$ эквивалентное демпфирование шасси на большей части диапазона амплитуд увеличивается и лишь на малых амплитудах незначительно уменьшается, т. е. по своим демпфирующим свойствам шасси становится лучше. Заметим, что $\bar{k}_z$ не превышает значения $0,5$ — максимального значения, полученного для чисто линейного амортизатора.

При значениях k , больших единицы, увеличение k приводит к уменьшению эквивалентного демпфирования шасси во всем диапазоне амплитуд. Так как k зависит от частоты q , которая для различных зон земного резонанса различна, может оказаться целесообразным для какой-либо из зон выбрать значение k даже больше единицы с тем, чтобы для другой, более опасной зоны оно оказалось оптимальным.

Второй параметр, определяющий демпфирование в стойке, $P_{тр}$ входит в безразмерную амплитуду z . При увеличении $P_{тр}$ увеличивается диапазон амплитуд, при которых стойка вообще не работает. Уменьшение $P_{тр}$ приводит к тому, что область больших значений демпфирования реализуется при меньших амплитудах обжатия шасси z .

Сравнение шасси с линейным гидравлическим демпфированием в амортизаторе, когда k_a подобран из требования оптимума демпфирования, с шасси, в амортизаторе которого имеется только сухое трение (для известных нам шасси в реализуемом диапазоне амплитуд сухое трение является определяющим), показывает выгоду первого. Максимум демпфирования во втором случае в $\pi/2$ меньше, чем в первом (см. фиг. 10). Что касается влияния жесткостных параметров, можно сказать следующее: уменьшение c_a всегда увеличивает эквивалентное демпфирование, так как

$$k_z = \frac{\bar{k}_z c_n^2}{(c_a + c_n) q}.$$

Влияние c_a на c_z обычно незначительно.

Жесткость пневматика влияет не только на k_z , но и на $\bar{z}$. Кроме того, c_n сильно влияет на жесткость шасси, а следовательно, на собственные частоты вертолета. Поэтому от величины c_n зависит не только располагаемое демпфирование шасси, но и демпфирование, необходимое для устранения неустойчивости.

Случай, когда в амортизаторе имеется сухое и гидравлическое трение, пропорциональное квадрату скорости обжатия амортизатора

Исследование шасси в этом случае будем проводить, предполагая, что демпфирование в пневматике отсутствует.

Функция демпфирования

$$f_a = (P_{тр} + \alpha \dot{s}^2) \text{sign } \dot{s}.$$

Уравнение обжатия амортизатора выразится следующим образом:

$$c_n(z - s) = c_a s + (P_{тр} + \alpha \dot{s}^2) \text{sign } \dot{s}. \quad (32)$$

Разрешим уравнение (32) относительно скорости $\dot{s}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= \frac{V|f_a| - P_{\text{тр}}}{\sigma} \operatorname{sign} \dot{s} & \text{при } |f_a| \geq P_{\text{тр}}, \\ \dot{s} &= 0 & \text{при } |f_a| \leq P_{\text{тр}}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

В этих уравнениях знак скорости остается величиной неопределенной. Однако он может быть связан со знаком функции f_a ; для этого воспользуемся уравнением (32):

$$f_a = (P_{\text{тр}} + \sigma \dot{s}^2) \operatorname{sign} \dot{s}.$$

Величина, стоящая в скобках, всегда положительна, следовательно, знак f_a будет определяться знаком $\dot{s}$, и в уравнениях (33) можно заменить $\operatorname{sign} \dot{s}$ на $\operatorname{sign} f_a$. Тогда уравнения переписутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= \frac{V|f_a| - P_{\text{тр}}}{\sigma} \operatorname{sign} f_a & \text{при } |f_a| \geq P_{\text{тр}}, \\ \dot{s} &= 0 & \text{при } |f_a| \leq P_{\text{тр}}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Введем безразмерные величины:

$$\bar{z} = \frac{c_n z}{P_{\text{тр}}}; \quad \bar{s} = \frac{(c_a + c_n) s}{P_{\text{тр}}}; \quad \tau = qt; \quad u = \frac{2qV P_{\text{тр}} \sigma}{c_n + c_a}. \quad (35)$$

Уравнение (34) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{s}' &= V |\bar{z} - \bar{s}| - 1 \operatorname{sign} F & \text{при } |\bar{z} - \bar{s}| > 1, \\ \bar{s}' &= 0 & \text{при } |\bar{z} - \bar{s}| \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где штрих означает производную по τ .

В таком виде уравнение решалось с помощью электроинтегратора и приближенным аналитическим методом.

Для построения приближенного решения было использовано то обстоятельство, что при больших амплитудах колебаний шасси ($z \rightarrow \infty$) колебания стойки будут относительно малы ($\frac{s}{z} \rightarrow 0$) вследствие того, что гидравлическое сопротивление возрастает пропорционально квадрату скорости. Поэтому для больших $\bar{z}$ в выражении $|\bar{z} - \bar{s}|$ можно оставить только $\bar{z}$, и, следовательно,

$$\bar{z} - \bar{s} = F = F_0 \sin \tau. \quad (37)$$

Будем считать, что это выражение сохранится и при малых $\bar{z}$. Такое предположение означает, что мы задаемся определенным видом функции $z(t)$, отличным от гармонического.

Сохраняя и для этого случая определения

$$k_3 = - \frac{\int_0^T P \dot{z} dt}{\int_0^T z^2 dt}; \quad c_3 = \frac{\int_0^T P z dt}{\int_0^T z^2 dt}$$

и вводя определение амплитуды общего обжатия шасси из соотношения

$$z_0^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z^2 d\tau,$$

получаем приближенные аналитические зависимости $k_3(z_0)$, $c_3(z_0)$. В безразмерной форме эти зависимости выражаются формулами:

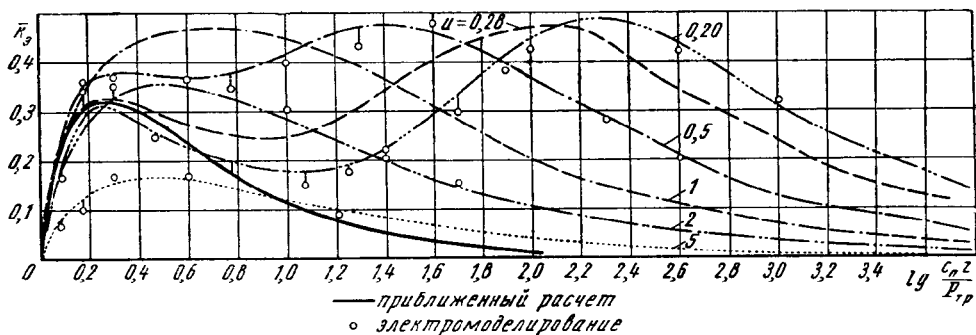
$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_3 &= \frac{F_0 s_{11}}{F_0^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{s}'^2 dt}, \\ \bar{c}_3 &= 1 - \frac{c_n}{c_a + c_n} \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{s}'^2 dt}{F_0^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{s}'^2 dt}, \\ \bar{z}_0^2 &= F_0^2 \left(u^2 + \frac{4}{\pi F_0^2} \int_0^{2\pi} \bar{s}'^2 dt \right), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где

$$\int_0^{2\pi} \bar{s}'^2 d\tau = 4F_0^2 \left(\frac{1}{F_0} \sqrt{1 - \frac{1}{F_0^2}} - \frac{1}{F_0^2} \arccos \frac{1}{F_0} \right),$$

$$\bar{s}_{11} \approx \frac{4}{\pi} \sqrt{F_0 - 1} \arccos \frac{1}{F_0} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{0,55645}{F_0} - \frac{0,19544}{F_0^2} \right).$$

На фиг. 15 приведено сравнение $\bar{k}_3(z)$, полученное по этим формулам, с результатами электро моделирования. Сравнение показывает, что полученная аппроксимация является удовлетворительной и формулами (38) можно пользоваться при расчетах земного резонанса.



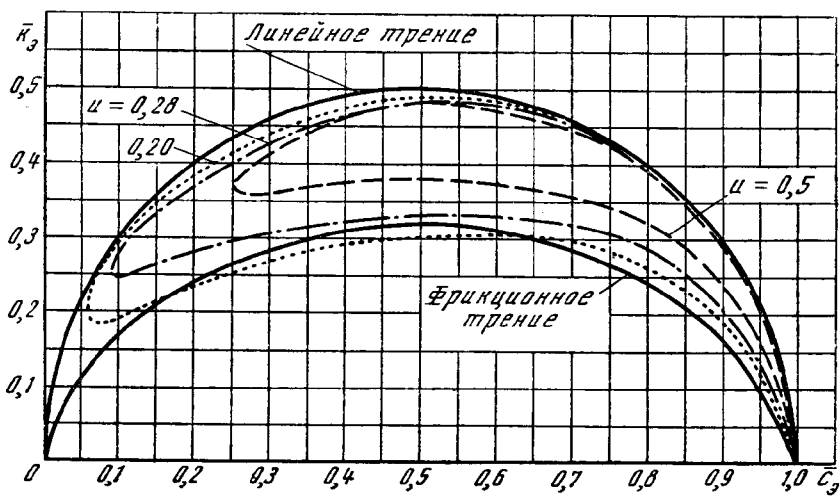
Фиг. 15

Зависимость $\bar{k}_3(\bar{c}_3)$, вычисленная по формулам (38) для различных значений u , приведена на фиг. 16.

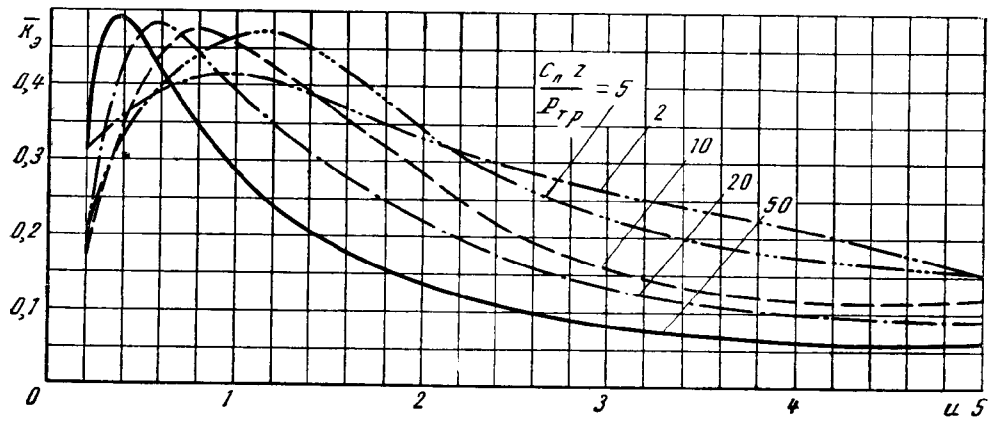
Остановимся подробнее на графиках фиг. 15. При значениях параметра u , меньших единицы, кривые имеют два максимума, первый из которых соответствует чисто фрикционной стойке, второй — чисто гидравлической. При $u \geq 1$ оба максимума сливаются в один. Так же, как для случая линейно-фрикционной стойки, максимум коэффициента эквивалентного демпфирования $\bar{k}_3$ не превышает 0,5.

Обратимся к графикам фиг. 17, где построена зависимость демпфирования в шасси от u , которая при постоянном значении $c_n z / P_{tr}$ фактически является зависимостью от характеристики гидравлического демп-

фирования σ стойки. Параметром в этом случае является отношение $c_n z / P_{тр}$ — приведенная амплитуда колебаний шасси. Для величины $\mu = 0,28$ это означает, что в диапазоне $2 < \frac{c_n z}{P_{тр}} < 20$ для увеличения демпфирования шасси выгоднее несколько увеличить коэффициент гидравлического сопротивления, т. е. уменьшить диаметры проходных сечений.



Фиг. 16



Фиг. 17

Учитывая, что и для других вертолетов соосной, одновинтовой и продольной схем величина безразмерного параметра μ мало отличается от приведенного значения, можно сделать вывод, что увеличение гидравлического сопротивления повышает суммарное демпфирование шасси. Значительное уменьшение проходного сечения может привести к уменьшению коэффициента демпфирования шасси. Однако столь значительное изменение площади проходных отверстий нереально, так как при посадке такая стойка не будет поглощать требуемую работу.

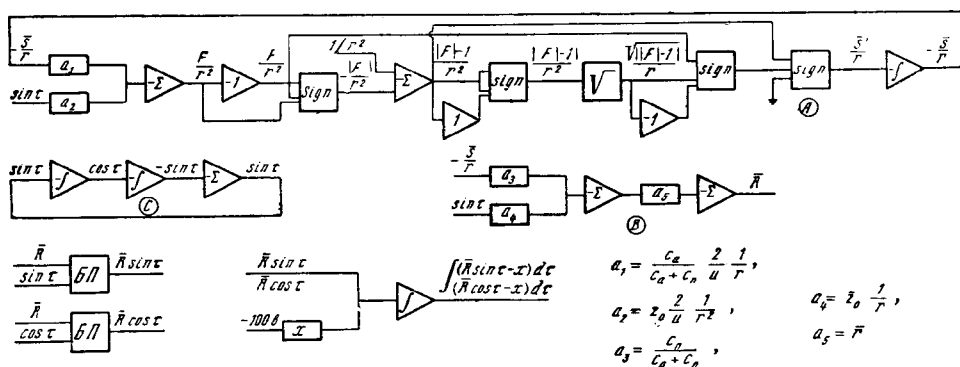
Решение уравнений вынужденных колебаний шасси с помощью электроинтегратора

В ходе выполнения работы к помощи электро моделирующих устройств пришлось прибегнуть лишь в одном случае, не допускавшем точного аналитического решения, а именно: в случае фрикционно-квадратичного амортизатора. При расчетах с использованием реальных зависимостей $f_a(\dot{s})$, полученных из эксперимента для конкретных стоек, применение счетнорешающих машин представляется необходимым. Примененная нами методика электро моделирования может быть использована и для этого общего случая.

На электроинтеграторе моделировалось уравнение колебаний шасси при нулевом демпфировании в пневматике:

$$\begin{aligned} \dot{s}' &= \frac{2}{u} V \sqrt{|\bar{z} - \bar{s}| - 1} \operatorname{sign}(\bar{z} - \bar{s}) & \text{при } |\bar{z} - \bar{s}| > 1, \\ \dot{s}' &= 0 & \text{при } |\bar{z} - \bar{s}| \leq 1. \end{aligned}$$

Блок-схема уравнения и дополнительных цепей, с помощью которых была получена сила $\bar{P}$, действующая на шасси, представлена на фиг. 18.



Фиг. 18

Для повышения точности определения искомых величин на электроинтеграторе в уравнение был введен масштабный коэффициент r следующим образом:

$$\frac{\ddot{s}'}{r} = \frac{2}{u} V \sqrt{\frac{|\bar{z} - \bar{s}|}{r^2} - \frac{1}{r^2}} \operatorname{sign}(\bar{z} - \bar{s}). \quad (39)$$

При любом значении $\bar{z}$ величину r можно подобрать так, чтобы амплитуды искомых величин были порядка 50—100 *вт* (эти амплитуды определяются на интеграторе с наименьшими погрешностями).

Следует отметить еще одну особенность схемы, связанную с работой блока нелинейности, воспроизводящего операцию извлечения квадратного корня. При отрицательных величинах, поданных на этот блок, он вместо нулевого напряжения, как это требует условие $\dot{s}' = 0$ при $|\bar{z} - \bar{s}| - 1 < 0$, давал на выходе отрицательное напряжение. Для уничтожения этого эффекта в схему было поставлено дополнительное

реле A (см. фиг. 18), которое в соответствии со знаком выражения $|\bar{z} - \bar{s}| - 1$ выделяло либо нулевое напряжение (т. е. цепь соединялась с землей), либо напряжение, равное $\sqrt{|\bar{z} - \bar{s}| - 1}$.

Буквой B на схеме обозначена цепь, с помощью которой по формуле

$$\bar{P} = \frac{c_a}{c_n + c_a} \bar{s} + \frac{u}{2} \left[\frac{2}{u} (\bar{z} - \bar{s}) \right]$$

определялась сила, действующая на стойку.

Решение производилось в предположении, что шасси совершает колебания по закону $\bar{z} = \bar{z}_0 \sin \tau$. Для задания гармонического закона изменения $\bar{z}$ служил колебательный контур C со стабилизирующим устройством, позволяющим в течение длительного времени поддерживать постоянную амплитуду колебаний $\bar{z}$.

Гармонически изменяющиеся величины $z_0 \sin \tau$ и $z_0 \cos \tau$ служили и для определения составляющих первой гармоники сил. С этой целью

на блоках произведения получились величины $P \sin \tau$ и $P \cos \tau$. Интегралы этих величин, осредненные по времени, $\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \bar{P} \sin \tau d\tau$,

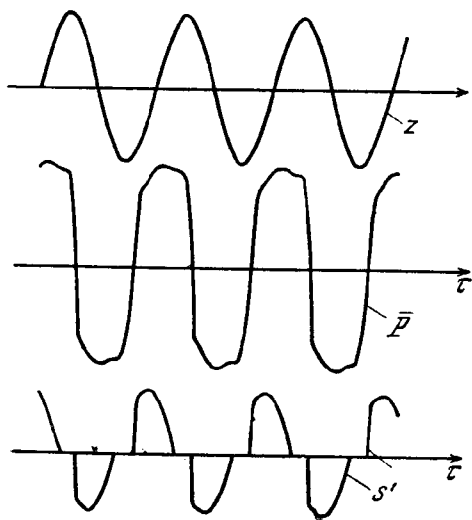
$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \bar{P} \cos \tau d\tau$ представляют собой

составляющие первой гармоники, находящиеся соответственно в фазе с перемещением и в фазе со скоростью перемещения шасси. Осреднение производилось следующим образом. На интегрирующий блок подавались произведения $\bar{P} \sin \tau$ или $\bar{P} \cos \tau$ и постоянное напряжение x . Величина x , при которой среднее значение интеграла оставалось постоянным, определяла составляющую первой гармоники силы. Это устройство, являющееся фактически гармоническим анализатором, позволяет с большой точностью определять составляющие гармоник любой периодической функции времени. Такой анализатор удобен тогда, когда период и фаза анализируемой функции связаны с частотой и фазой гармоник, по которым производится разложение.

На фиг. 15 приведены значения $\bar{k}_z$, полученные на электроинтеграторе. Сравнение этих результатов с результатами, полученными приближенным аналитическим методом, показывает хорошую сходимость на всем диапазоне приведенных значений z , а в области больших амплитуд или $u > 1$, где аналитический метод становится точным, позволяет оценить точность электромоделирования.

На фиг. 15 приведены значения $\bar{k}_z$, полученные на электроинтеграторе. Сравнение этих результатов с результатами, полученными приближенным аналитическим методом, показывает хорошую сходимость на всем диапазоне приведенных значений z , а в области больших амплитуд или $u > 1$, где аналитический метод становится точным, позволяет оценить точность электромоделирования.

Наглядное представление о работе амортизационной стойки при различных амплитудах и различных значениях параметров u и $\frac{c_a}{c_n + c_a}$ дают осциллограммы, приведенные на фиг. 19.



Фиг. 19

Экспериментальное определение динамических характеристик шасси

Экспериментальное определение эквивалентной жесткости шасси и эквивалентного коэффициента демпфирования производилось для основного полushасси одного из вертолетов попутно с определением посадочных характеристик шасси. С этой целью с помощью эксцентрика было произведено гармоническое обжатие шасси, установленного на копре (фиг. 20). Тензометрическими весами, на которые опирался пневматик, измерялась сила реакции шасси. Во время эксперимента определялось также обжатие амортизатора. Образец записи дан на фиг. 21. С помощью гармонического анализатора находились составляющие первой гармоники силы P в фазе с перемещением P_1 и фазе со скоростью перемещения P_{11} .

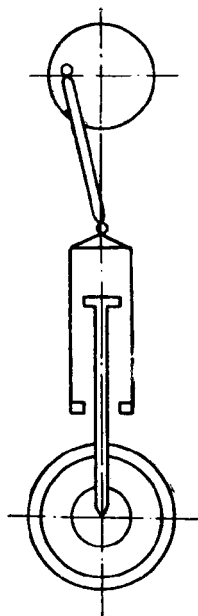
Эквивалентные характеристики шасси определялись по формулам:

эквивалентная жесткость

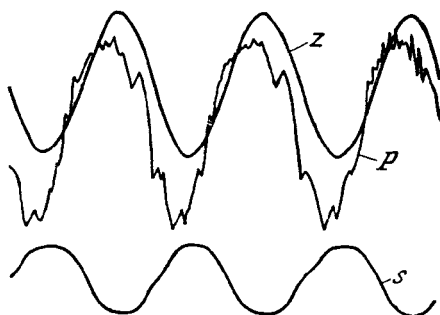
$$c_3 = \frac{P_1}{z_0}; \quad (40)$$

эквивалентное демпфирование

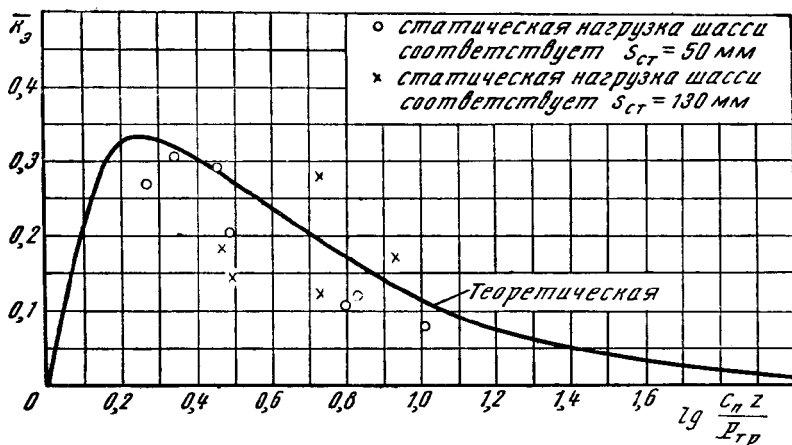
$$k_3 = \frac{P_{11}}{qz_0}. \quad (41)$$



Фиг. 20



Фиг. 21



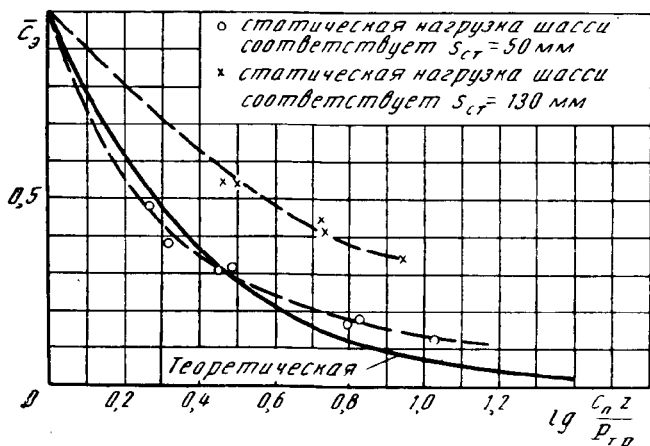
Фиг. 22

На фиг. 22 и 23 представлены зависимости безразмерных коэффициентов демпфирования $\bar{k}_3 = \frac{k_3 q (c_a + c_n)}{c_n^2}$ и жесткости $\bar{c}_3 = \frac{c_3}{c_n}$ от безразмерной амплитуды полного обжатия шасси $\bar{z} = \frac{c_n z}{P_{тр}}$.

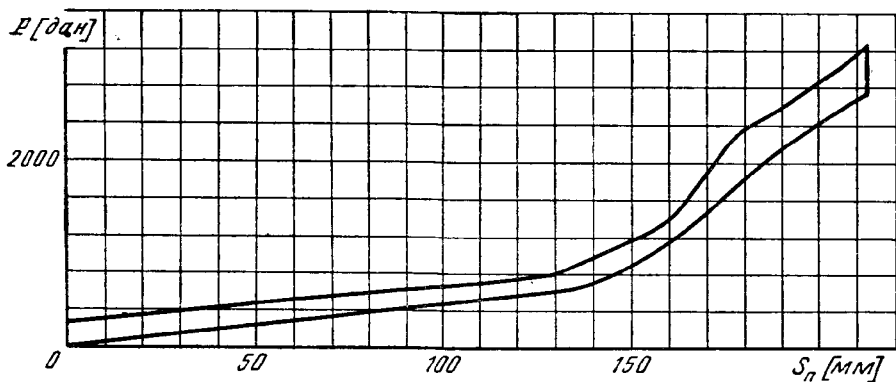
Величины c_a и $P_{тр}$ определялись из диаграммы статического обжатия шасси (фиг. 24) для соответствующей статической нагрузки на шасси. Значение c_n было взято из каталога для данного пневматика.

На фиг. 22 и 23 нанесены также теоретические значения $\bar{k}_3$ и $\bar{c}_3$ в предположении, что $c_a = 0$, демпфирование в пневматике отсутствует, а в амортизаторе имеется только сухое трение.

Необходимо отметить, что эксперимент носил предварительный характер, однако результаты его позволяют уже сделать некоторые выводы.



Фиг. 23



Фиг. 24

Сравнение экспериментальных характеристик с теоретическими показывает, что гидравлическое сопротивление в амортизаторе в исследованном диапазоне амплитуд (до $z_0 = 50$ мм) несущественно и динамические характеристики шасси такие же, как если бы амортизатор имел только одно фрикционное трение.

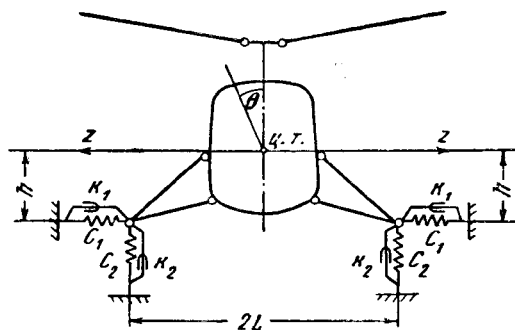
§ 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ШАССИ ПРИ РАСЧЕТЕ ЗЕМНОГО РЕЗОНАНСА ВЕРТОЛЕТА

Рассматривается вопрос о применении полученных ранее зависимостей эквивалентного демпфирования шасси и эквивалентной жесткости шасси от амплитуды колебаний к расчету вертолета на земной резонанс и приводится пример такого расчета. При написании этого раздела были использованы работы Л. Н. Гродко.

Принимая, что демпфирование свободных колебаний лопасти в вертикальном шарнире линейно и определяется коэффициентом $\bar{n}_a$, определим демпфирование в стойке, необходимое для устранения зоны неустойчивости. Для этого воспользуемся известной приближенной формулой (см. [1])

$$(4 \bar{n}_a \bar{n}_b)_{\text{потр}} = \frac{\varepsilon(1 - \nu_0)}{2 \nu_0}.$$

Эта формула определяет потребное демпфирование для устранения неустойчивости в центре зоны. Для полного устранения зоны этого



Фиг. 25

демпфирования может оказаться недостаточно (максимум потребного демпфирования может не совпадать с центром), однако для приближенных расчетов обычно пользуются этой формулой. Из нее следует, что

$$(\bar{n}_{\text{ш}})_{\text{потр}} = \frac{\varepsilon(1 - \nu_0)}{8 \nu_0 \bar{n}_a}.$$

Зная $\bar{n}_{\text{ш}}$, можно перейти к эквивалентным характеристикам шасси.

Рассмотрим колебания вертолета на шасси. Схематически представим вертолет как массу, колеблющуюся на упругих опорах (фиг. 25). Вертолет может совершать как поступательные движения по оси z , так и поворот вокруг продольной оси.

Уравнение колебаний вертолета на опорах при отсутствии демпфирования можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} M \ddot{z} + C_1 z + \theta h C_1 &= 0, \\ \frac{1}{2} I \ddot{\theta} + h^2 \theta C_1 + L^2 \theta C_2 + C_1 z h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{z} = \frac{z}{n}; \quad p_2^2 = \frac{2 h^2 C_1}{I}; \quad p_1^2 = \frac{2 C_1}{M}; \quad p_3^2 = \frac{2 L^2 C_2}{I}. \quad (43)$$

Тогда уравнения (42) перепишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + p_1^2 \bar{z} + p_1^2 \theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + (p_2^2 + p_3^2) \theta + p_2^2 z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Найдем решение системы (44) в виде

$$z = Ae^{iqt}; \quad \theta = Be^{iqt}.$$

Характеристическое уравнение системы будет:

$$q^4 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) q^2 + p_1^2 p_3^2 = 0.$$

Отсюда частоты колебаний вертолета определяются по следующей формуле:

$$q_{1,2} = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2}\right) - p_1^2 p_3^2}. \quad (45)$$

Найдем теперь соотношение между амплитудами колебаний вертолета по оси z и вокруг продольной оси. Из первого уравнения системы (44) оно запишется в виде

$$A = \frac{p_1^2 B}{q^2 - p_1^2}, \quad (46a)$$

а из второго уравнения — в виде

$$A = \frac{(p_2^2 + p_3^2 - q^2) B}{p_2^2}. \quad (46b)$$

Подставив в эти выражения значение q из (45), легко убедиться, что они тождественны. В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (46a) как более простой. Она показывает, что колебания вертолета на шасси можно представить как колебания относительно некоторого узла, который находится на расстоянии $\bar{R} = -\frac{A}{B}$ от центра тяжести вертолета (фиг. 26):

$$\bar{R} = -\frac{p_1^2}{q^2 - p_1^2}. \quad (47)$$

Знак „минус“ здесь взят потому, что узел колебаний находится ниже центра тяжести вертолета.

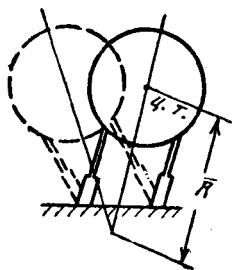
Введем теперь демпфирование в шасси. Характеристическое уравнение становится полным уравнением 4-го порядка. Получим приближенное решение в предположении, что частота и форма колебаний остаются такими же, как при отсутствии демпфирования.

Уравнение колебаний относительно узла запишется в виде:

$$\frac{1}{2}(I + MR^2)\ddot{\theta} + (R - h)^2 \theta C_1 + L^2 \theta C_2 + (R - h)^2 \theta k_1 + L^2 \theta k_2 = 0. \quad (48)$$

Перепишем уравнение (48) в виде

$$\ddot{\theta} + 2n_{\text{ш}} \dot{\theta} + q^2 \theta = 0, \quad (49)$$



Фиг. 26

где

$$2n_{ш} = \frac{(R-h)^2 2k_1 + L^2 2k_2}{I + MR^2} - \quad (50)$$

коэффициент приведенного демпфирования колебаний вертолета.
Введя обозначения

$$2n_1 = \frac{2k_1}{M}; \quad 2n_2 = \frac{2k_1 h^2}{I}; \quad 2n_3 = \frac{2k_2 L^2}{I}; \quad \bar{R} = \frac{R}{n} \quad (51)$$

и используя соотношения (43), получим:

$$2n_{ш} = \frac{(\bar{R} - 1)^2 2n_2 + 2n_3}{1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \bar{R}^2}. \quad (52)$$

Для формы колебаний вертолета, соответствующей высшей частоте q , получаем несколько заниженное значение $2n_{ш}$; действительно, из физических соображений следует, что при наличии демпфирования узел колебаний расположен ближе к центру тяжести, чем без демпфирования, т. е. в действительности R меньше, чем вычисляемое по формуле (47).

Разрешим уравнение (52) относительно $2n_3$:

$$2n_3 = 2n_{ш} \left(1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \bar{R}^2 \right) - 2n_2 (\bar{R} - 1)^2. \quad (53)$$

Подставим в него выражение для $(n_{ш})_{нотр}$:

$$(2n_3)_{нотр} = \frac{\varepsilon(1 - \nu_0)}{4 \nu_0 n_n} q^2 \left(1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \bar{R}^2 \right) - 2n_2 (\bar{R} - 1)^2. \quad (54)$$

Величину коэффициента ε вычислим по формуле

$$\varepsilon = \frac{k}{2} \frac{s^2 H^2}{I_n I} \frac{\left(1 + \frac{\bar{R}h}{H} \right)^2}{1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \bar{R}^2}, \quad (55)$$

где H — расстояние от центра втулки до центра тяжести.

Множитель $\left(1 + \frac{\bar{R}h}{H} \right)^2 / 1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \bar{R}^2$ можно приближенно принять равным единице (это следует делать только для второго тона колебаний, соответствующего высшей частоте q).

Таким образом, если известна величина n_n , то можно определить величину демпфирования $2n_3$, потребного для устранения неустойчивости.

Если вертолет имеет в вертикальных шарнирах фрикционные демпферы, то эквивалентный линейный коэффициент демпфирования свободных колебаний лопасти будет зависеть от махового движения и может быть выражен формулой

$$n_n = \frac{M_{тр}(1 - \nu_0)}{\pi 2 a_0 a_1 I_n q}, \quad (56)$$

где $M_{тр}$ — момент затяжки фрикционного демпфера лопасти,

a_0 — угол конусности,

a_1 — амплитуда первой гармоники махового движения.

Следовательно, при различных значениях угла конусности и амплитуды махового движения величина потребного демпфирования $2n_3$ будет различной.

Свяжем теперь коэффициент $2n_3$ с $\bar{k}_3$. По формуле (51) имеем

$$2n_3 = \frac{2k_2 L^2}{I},$$

где k_2 — размерный коэффициент демпфирования полшасси при вертикальных колебаниях.

Следовательно,

$$(\bar{k}_3)_{\text{потр}} = \frac{k_2 (c_a + c_n) q}{c_n^2} = \frac{(2n_3)_{\text{потр}} I (c_a + c_n)}{2L^2 c_n^2} q. \quad (57)$$

Потребное демпфирование по полученным формулам будем определять следующим образом:

- 1) задаемся величиной эквивалентной жесткости шасси в вертикальном направлении $c_3 = c_2$ и, следовательно, величиной p_3^2 ;
- 2) находим величины q и R , соответствующие данной жесткости;
- 3) по формулам (54) и (57) определяем значение $(\bar{k}_3)_{\text{потр}}$; оно будет зависеть также и от махового движения лопастей, т. е. от коэффициентов a_0, a_1 .

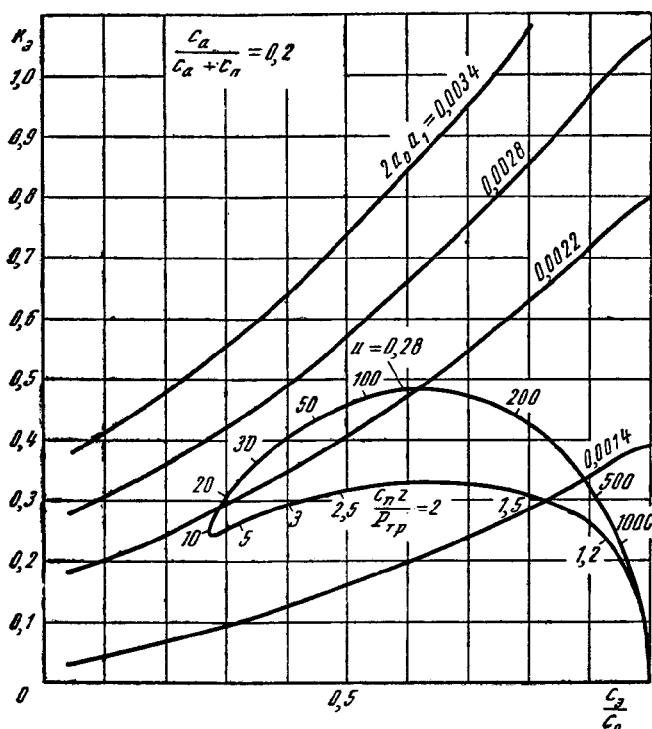
Полученные величины $(\bar{k}_3)_{\text{потр}}$ строим как функцию от c_3/c_n ; параметром семейства этих функций будет произведение $a_0 a_1$.

Такие графики приведены на фиг. 27 и 28. Принимались следующие параметры вертолета:

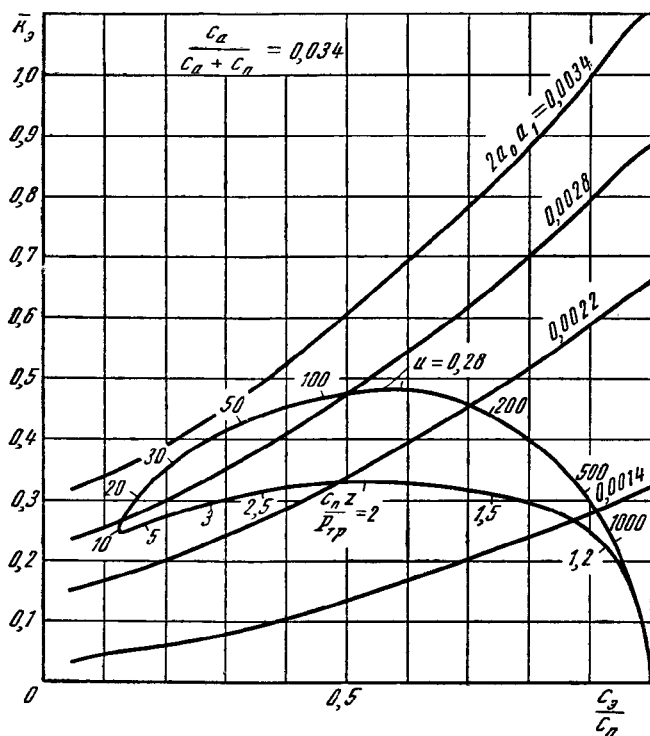
$$\epsilon = \frac{k}{2} \frac{s_2 H^2}{I_a I} = 0,079; \quad \frac{M_{\text{тр}} (1 - \gamma_0)}{\pi I_a} = 0,128; \quad \frac{p_2^2}{p_1^2} = 2,83; \quad \frac{p_3^2}{p_1^2} = 1,45 \frac{c_3}{c_n}.$$

На фиг. 27 и 28 приведено значение $(\bar{k}_3)_{\text{потр}}$ для второй зоны неустойчивости, т. е. для высших значений q . Как уже говорилось выше, эти графики представляют собой зависимость величины демпфирования в стойке (при вертикальных колебаниях), потребной для устранения неустойчивости в центре зоны, от эквивалентной жесткости шасси. Однако шасси при каждом значении c_3 обладает вполне определенным значением коэффициента демпфирования, который вычисляется по формулам, приведенным в § 3, и который мы будем называть $(\bar{k}_3)_{\text{расп}}$ — коэффициентом располагаемого демпфирования шасси. Значения его, вычисленные при $u = 0,28$ и соответствующих значениях $\frac{c_a}{c_a + c_n}$, также приведены на фиг. 27 и 28. Каждой точке этих кривых соответствует определенная амплитуда вертикальных колебаний шасси (см. предыдущие параграфы).

Если кривые потребного и располагаемого демпфирования пересекаются (фиг. 29), то при амплитудах, соответствующих участку ACB кривой располагаемого демпфирования, демпфирование в шасси будет больше, чем потребное, и, следовательно, колебания вертолета будут затухать. При амплитудах, соответствующих участкам OA и BO , демпфирование в шасси будет меньше потребного, и колебания будут нарастающими. Проследим, как происходят колебания вертолета при различных начальных амплитудах. Если начальные условия таковы, что амплитуда колебаний шасси соответствует точке на участке OA , то, как уже



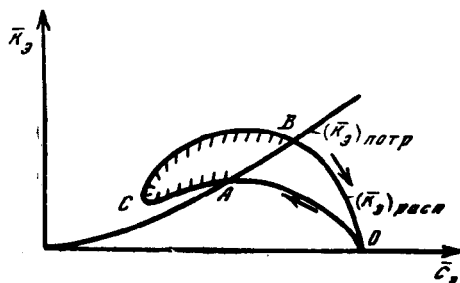
Фиг. 27



Фиг. 28

говорилось, колебания будут нарастающими до тех пор, пока амплитуда их не достигнет величины, соответствующей точке A ; с этого момента колебания будут установившимися. Если начальные условия соответствуют точке участка ACB кривой, то колебания будут затухать, пока амплитуда не достигнет величины, соответствующей точке A кривой. Таким образом, точка A определяет амплитуду устойчивого предельного цикла. При начальных условиях, соответствующих участку BO , амплитуда колебаний вертолета будет неограниченно возрастать. Точка B определяет амплитуду неустойчивого предельного цикла.

На фазовой плоскости $(z, \dot{z})$ отрезки OA , AB , BO изобразятся соответственно областями Q_1 , Q_2 , Q_3 , а предельные циклы — границами этих областей: устойчивый — границей области Q_1 и Q_2 , неустойчивый — границей Q_2 и Q_3 . Практический интерес представляют лишь участки OA и ACB . Участок BO , как правило, соответствует большим, конструктивно не осуществимым амплитудам.



Фиг. 29

Приведенный метод расчета земного резонанса вертолета может быть уточнен и дополнен, если воспользоваться для определения потребного демпфирования не приближенной формулой, а точными зависимостями. Кроме того, желательно учесть и тот факт, что при изменении a_0 (угла конусности и, следовательно, тяги несущего винта) будет изменяться жесткость амортизационной стойки и, следовательно, отношение $\frac{c_a}{c_a + c_n}$ (в данной работе вычисления производились для значений $\frac{c_a}{c_a + c_n} = 0,036$ и $0,2$, соответствующих различным значениям разгрузки шасси за счет тяги винта). Таким образом, кривые $\bar{k}_s(\bar{c}_s)_{\text{потр}}$ и $\bar{k}_s(\bar{c}_s)_{\text{расп}}$ являются функцией параметра a_0 .

ВЫВОДЫ

1. Определение характеристик шасси путем замены амортизатора „эквивалентным“ линейным элементом может привести к значительным ошибкам.

2. Увеличение степени демпфирования амортизатора не всегда увеличивает демпфирование шасси. Существует некоторое оптимальное значение демпфирования амортизатора, при превышении которого уменьшается общее демпфирование шасси. Максимальное демпфирование шасси зависит от отношения жесткости амортизатора к жесткости пневматика и величина его тем больше, чем меньше это отношение. Если отношение жесткости амортизатора слишком мало (слишком „мягкий“ пневма-

тик), то никаким увеличением демпфирования амортизатора нельзя устранить земной резонанс.

3. При малых амплитудах колебаний $\left(\text{до } \frac{c_n z}{P_{тр}} \approx 10 \right)$ квадратичной составляющей гидравлического сопротивления можно пренебречь. Для обычного шасси линейная составляющая гидравлического сопротивления тоже мала, и при расчетах земного резонанса можно учитывать только демпфирование от сухого трения в амортизационных стойках.

4. Уменьшение сухого трения и переход к амортизаторам с линейным законом сопротивления позволяют значительно увеличить демпфирование шасси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жеребцов Б. Я. Динамическая устойчивость несущего винта вертолета с учетом упругости его опоры. Сборник работ по теоретическому исследованию земного резонанса вертолета. Изд. БНИ ЦАГИ, 1966.
 2. Coleman R. P. Theory of self-excited mechanical oscillations of hinged rotor blades. NASA, ARR No, 3699, 1943.
 3. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов, Изд. АН СССР, Ин-т машиноведения, 1959.
 4. Norway G. Vibrations of a helicopter on the ground. JAS, No. 11, november 1946.
 5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958.
-

ВЫБОР ХАРАКТЕРИСТИК ШАССИ ВЕРТОЛЕТА ИЗ УСЛОВИЙ ЗЕМНОГО РЕЗОНАНСА

Ю. А. МЯГКОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Изложен метод определения параметров шасси одновинтового вертолета из условия обеспечения запаса по земному резонансу. Устанавливаются оптимальные значения жесткости и демпфирования. Дается анализ предлагаемой методики в случае колебаний на пробеге, на стоянке и при колебаниях с отрывом пневматиков.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию колебаний вертолета типа земной резонанс было посвящено много работ. В них выявлена сущность этого явления, дан анализ способов устранения неустойчивости и предложены методы расчета критических чисел оборотов для различных режимов работы вертолета: при раскрутке несущего винта, при работе на стоянке, при движении вертолета по земле. Как показали эти исследования, существенное влияние на критические числа оборотов оказывают частоты собственных колебаний и демпфирование вертолета и лопасти. Поэтому при проектировании вертолета возникает вопрос о выборе параметров шасси и винта, обеспечивающих отсутствие земного резонанса в диапазоне эксплуатационных чисел оборотов. Однако конструктор часто бывает ограничен в свободе выбора параметров винта (расположение вертикального шарнира, момент демпфера) по конструктивным и прочностным соображениям. Поэтому здесь рассматривается только вопрос о выборе параметров шасси.

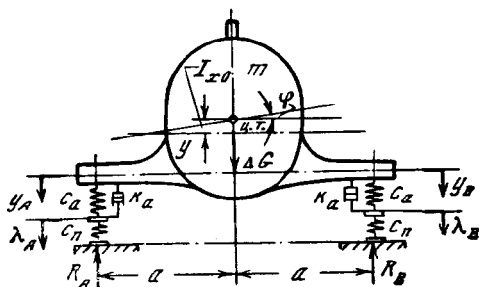
Задача о выборе параметров решается на примере одновинтового вертолета с пирамидальным основным шасси. Известно, что для таких вертолетов наибольший практический интерес при земном резонансе представляют поперечные колебания, которые достаточно хорошо описываются в плоской задаче с учетом двух степеней свободы основания. Поэтому в данной работе при рассмотрении плоской задачи о поперечных колебаниях вертолета предлагается метод выбора параметров шасси из условия отсутствия земного резонанса. Аналитическое решение дается в линейной постановке задачи. На интеграторе моделируется решение нелинейной задачи о колебаниях вертолета с „подпрыгиванием“ (отрывом пневматиков от земли).

В работе не рассматривается вопрос пригодности шасси с выбранными параметрами для выполнения функций посадочного устройства.

Это объясняется тем, что обеспечение посадочных характеристик является самостоятельным практически важным вопросом и решается независимо от характеристик земного резонанса. Для иллюстрации этого можно показать, что выбор необходимого из условий земного резонанса соотношения жесткостей пневматика и амортизатора не накладывает никаких ограничений на выбор величины обжатия амортизационной стойки. В качестве другого примера можно привести конструктивное решение амортизационной стойки с необходимой величиной демпфирования и клапаном ограничения перегрузок*.

О ДЕМПФИРОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ ВЕРТОЛЕТА

Рассматривается задача о земном резонансе вертолета, фюзеляж которого имеет две степени свободы: вертикальные смещения и поворот вокруг продольной оси. Так как вертикальные колебания при симметричном шасси не связаны с угловыми колебаниями и колебаниями лопастей в плоскости вращения, то в линейной постановке задачи рассматривается только поворот вокруг продольной оси. При этом предполагается, что ось втулки несущего винта, центр тяжести вертолета и основное шасси расположены в одной плоскости.



Фиг. 1

На фиг. 1 представлена схема вертолета. Последовательно включенные пружины с жесткостями c_a и c_n соответствуют упругости амортизационной стойки, приведенной к вертикальному направлению, и пневматика. Параллельно стойке включен демпфер с коэффициентом пропорциональности между силой и скоростью его перемещения k_a .

Необходимо отметить, что в действительности, кроме вертикальной жесткости, пневматик обладает еще и жесткостью в поперечном направлении c_{zn} . Однако в некоторых случаях она может не оказывать воздействия на вертолет и поэтому здесь не учитывается (например, при работе на льду, скользком грунте или в случае разбега и пробега при самолетной посадке [2]).

Таким образом, уравнение движения вертолета имеет вид:

$$I_{x0} \ddot{\varphi} + 2k_{эКВ} a^2 \dot{\varphi} + 2c_{эКВ} a^2 \varphi = 0, \quad (1)$$

где $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ — угол крена вертолета и его первая и вторая производные;
 I_{x0} — момент инерции вертолета вокруг продольной оси;
 a — половина колеи;

$c_{эКВ}, k_{эКВ}$ — жесткость и коэффициент демпфирования параллельно соединенных пружины и демпфера, эквивалентных исходной системе так, что при приложении одной и той же переменной нагрузки к эквивалентной системе и к исходной перемещения их получаются одинаковыми.

* См. авторское свидетельство № 141.391 от 1959 г. „Способ устранения земного резонанса вертолетов“.

Выражения для $c_{\text{эКВ}}$ и $k_{\text{эКВ}}$ через исходные параметры амортизации вертолета можно получить, если исходной системе задать гармонические смещения вида

$$y = y_0 \cos pt$$

и усилие реакции на это смещение представить в виде двух составляющих, одна из которых изменяется в фазе со смещением, а другая составляет фазу 90° . Тогда из первой составляющей определяется

$$c_{\text{эКВ}} = \frac{c_n c_a (c_n + c_a) + c_n p^2 k_a^2}{(c_a + c_n)^2 + p^2 k_a^2}, \quad (2)$$

а из второй составляющей суммарной реакции определяется

$$k_{\text{эКВ}} = \frac{k_a c_n^2}{(c_a + c_n)^2 + p^2 k_a^2}. \quad (3)$$

Это известные формулы для линейных характеристик амортизатора и демпфера при гармонических колебаниях.

Из решения задачи о земном резонансе с одной степенью свободы опоры винта, данного в работе [3], следует, что для устранения неустойчивости необходимо выполнение условия

$$\bar{n}_л \bar{n}_в \geq \frac{\varepsilon (1 - \nu_0)}{8\nu_0}, \quad (4)$$

где $\bar{n}_л$ и $\bar{n}_в$ — относительные коэффициенты демпфирования лопасти и вертолета соответственно (логарифмические декременты затухания колебаний);

$\nu_0 = \sqrt{\frac{I_{в.ш} S_{в.ш}}{I_{в.ш}}}$ — относительная частота маятниковой формы колебаний лопасти в поле центробежных сил;

$\frac{z}{2} \frac{S_{в.ш}}{I_{в.ш}} \frac{b^2}{I_{x0}}$ — безразмерный параметр;

$I_{в.ш}$, $S_{в.ш}$, I_{x0} — вынос вертикального шарнира, статический момент и момент инерции лопасти относительно оси вертикального шарнира;

b — расстояние от ц. т. вертолета до втулки несущего винта;

z — число лопастей.

Приближенная формула (4) справедлива для центра зоны неустойчивости, когда

$$\omega = \frac{p_v}{1 - \nu_0}.$$

Однако в большинстве случаев, когда величины $\bar{n}_л$ и $\bar{n}_в$ одного порядка, ошибка, даваемая этой формулой, невелика.

Как уже указывалось, предполагаем, что величина демпфирования лопасти выбрана из конструктивных и прочностных соображений. Поэтому условие устойчивого движения можно представить в виде

$$\bar{n}_в \geq \frac{\varepsilon (1 - \nu_0)}{8\nu_0 \bar{n}_л}, \quad (4a)$$

т. е. для устойчивого движения необходимо обеспечить определенную величину относительного коэффициента демпфирования вертолета.

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} + 2p_B \bar{n}_B \dot{\varphi} + p_B^2 \varphi = 0, \quad (1a)$$

где p_B — частота собственных колебаний вертолета;

$$p_B^2 = \frac{2c_{\text{эКВ}} a^2}{I_{x0}}; \quad (5)$$

$\bar{n}_B$ — логарифмический декремент затухания колебаний;

$$\bar{n}_B = \frac{n_B}{p_B} = \frac{k_{\text{эКВ}} a^2}{I_{x0} p_B} = \frac{k_{\text{эКВ}} a^2 p_B}{I_{x0} p_B^2}. \quad (6)$$

В выражение (6) подставляем вместо p_B^2 его значение из выражения (5). Получаем зависимость

$$\bar{n}_B = \frac{k_{\text{эКВ}} p_B}{2c_{\text{эКВ}}}. \quad (7)$$

Используя выражения (2) и (3) для $c_{\text{эКВ}}$ и $k_{\text{эКВ}}$ и подставляя в них p_B вместо p , получаем

$$\bar{n}_B = \frac{c_n k_a p_B}{2[c_a(c_a + c_n) + k_a^2 p_B^2]}. \quad (8)$$

Из условия

$$\frac{d(\bar{n}_B)}{d(k_a p_B)} = 0$$

находим, что максимального значения $\bar{n}_B$ достигает при условии

$$k_a^2 p_B^2 = c_a(c_a + c_n). \quad (9)$$

Подставляя условие (9) в выражение (8), находим максимальное значение $\bar{n}_B$:

$$[\bar{n}_B]_{\max} = \frac{0,25}{\sqrt{k(1+k)}}, \quad (10)$$

где $k = \frac{c_a}{c_n}$.

Полученное выражение означает, что при выбранной величине относительной жесткости k декремент колебаний, который можно получить соответствующим подбором демпфирования амортизационной стойки, имеет максимум, величина которого зависит только от относительной жесткости, причем величина этого максимального значения тем больше, чем меньше относительная жесткость амортизационной стойки. Этим и объясняется известный факт, что более „мягкая“ стойка, т. е. с большим ходом, обеспечивает большее демпфирование (см., например, [4] или [5]). Физический смысл этого свойства заключается в том, что при малых значениях демпфирования стойки увеличение демпфирования приводит к увеличению работы, поглощаемой демпфером. Однако по мере роста демпфирования эквивалентная жесткость амортизационной стойки увеличивается и все большая часть общего хода осуществляется уже за счет пневматика, что ведет в итоге к уменьшению поглощенной демпфером работы. Таким образом, имеется оптимум при некотором промежуточном значении демпфирования.

Эффективность применения двухкамерных стоек также частично объясняется указанным свойством, так как при работе ее дополнитель-

ной камеры, т. е. при малых нагрузках на стойку, она обладает очень малой жесткостью, что позволяет получать большие величины демпфирования.

Значение эквивалентной жесткости, соответствующее $[\bar{n}_b]_{\max}$, находим из выражения (2) после подстановки в него условия (9):

$$c_{\text{эв}} = c_{\pi} \frac{2k}{1+2k}, \quad (11)$$

а частоту собственных колебаний— после подстановки $c_{\text{эв}}$ в выражение (5):

$$\bar{p}_b = \frac{p_b^*}{p_{\pi}} = \sqrt{\frac{2k}{1+2k}}, \quad (12)$$

где $p_{\pi}^2 = \frac{2c_{\pi}a^2}{I_{x0}}$ — частота собственных колебаний вертолета на пневматиках.

Подстановкой выражения (12) в условие (9) получается выражение для коэффициента демпфирования амортизационной стойки $\bar{k}_a^*$, при котором декремент $\bar{n}_b$ имеет максимум:

$$\bar{k}_a^* = \frac{k_a p_{\pi} \sqrt{2}}{c_{\pi}} = \sqrt{(1+k)(1+2k)}. \quad (13)$$

Полученные выражения важнейших характеристик шасси через соотношение $k = \frac{c_a}{c_{\pi}}$ позволяют однозначно определить исходные значения характеристик шасси c_a , c_{π} , a . Эти зависимости представлены на фиг. 2.

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ШАССИ

Отсутствие зон неустойчивости в диапазоне рабочих чисел оборотов обеспечивается правильным выбором частот собственных колебаний вертолета и величины демпфирования амортизационных стоек. Демпфирование вертолета здесь называется располагаемым демпфированием в отличие от потребного, необходимого для устранения зоны неустойчивости, и определяется по формуле (10).

Величина потребного демпфирования определяется из соотношения (4а), где с учетом выражения (12) и

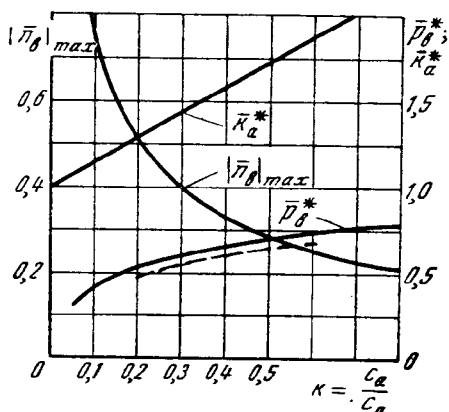
$$\bar{n}_l = \frac{n_l}{p_b^*} = \frac{n_l}{p_{\pi} \bar{p}_b^*}$$

получается

$$[\bar{n}_b]_{\text{потр}} = \frac{\varepsilon(1-\nu_0)}{8\nu_0} \frac{p_{\pi}}{n_l} \bar{p}_b^* = \alpha \bar{p}_b^*. \quad (14)$$

Входящие в эту формулу величины ν_0 и n_l зависят только от лопасти несущего винта. Параметр связи ε зависит от соотношения эквивалентной массы несущего винта и вертолета. Таким образом, видно, что потребное демпфирование прямопропорционально частоте собственных колебаний вертолета или, другими словами, изменяется в зависимости от величины k (относительной жесткости амортизации).

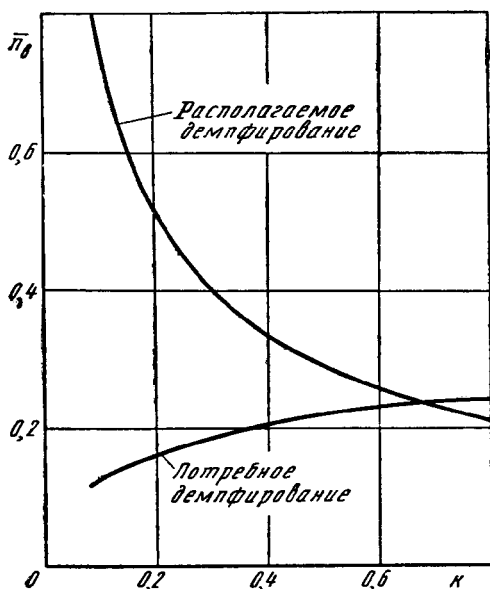
На фиг. 3, представляющей зависимости располагаемого демпфирования от относительной жесткости k , построим кривую потребного демпфирования согласно выражению (14). На этом графике видно, что



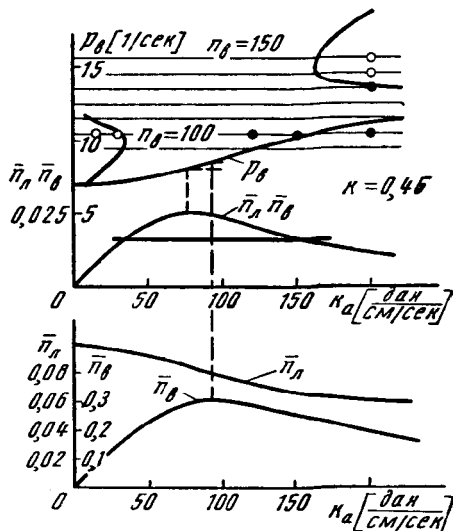
Фиг. 2

имеется некоторое значение относительной жесткости амортизации, при котором располагаемое демпфирование равно потребному. При неудачном выборе k (если оно будет больше указанного) располагаемого демпфирования будет недостаточно для устранения зоны неустойчивости. В случае, когда относительная величина жесткости стойки будет меньше указанной выше, можно обеспечить запас по демпфированию. Таким образом, выбирая определенное значение k , можно обеспечить необходимый запас демпфирования.

При выбранном значении относительной жесткости жесткость пневматика следует выбирать такой, чтобы частота собственных колебаний вертолета на пневматиках (при неработающих стойках) была больше



Фиг. 3



Фиг. 4

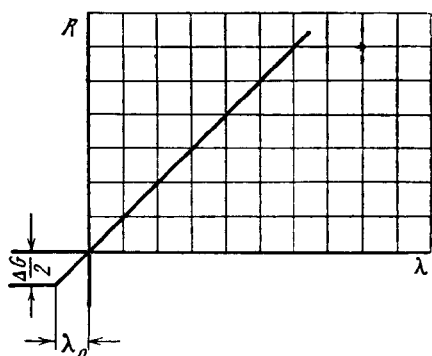
верхней границы рабочих чисел оборотов или, по крайней мере, совпала с ней. Это условие обеспечит расположение зоны неустойчивости при колебаниях вертолета с неработающими стойками (при большой тяге винта) выше рабочих чисел оборотов.

На фиг. 4 показана зависимость границ устойчивости от коэффициента демпфирования стойки. Границы устойчивости здесь определены по графикам, приведенным в работе [1]. Эти графики можно также использовать для построения потребного демпфирования вместо приближенной зависимости (4а). На этом графике приведены также кривые демпфирования лопасти вертолета и частоты собственных колебаний. Как видно из графика, имеется ряд значений коэффициента демпфирования стойки k_a , для которых выполняется условие (4а), и зона неустойчивости отсутствует для любых значений ω . Наибольший запас по демпфированию обеспечивается при $k_{a \text{ opt}} = (0,8 \div 0,85) k_a^*$ в силу того, что максимум величины $\bar{n}_d \bar{n}_b$ находится при меньших на 15—20% значениях k_a , чем максимум величины $\bar{n}_b$. На фиг. 2 пунктиром показана частота собственных колебаний вертолета, соответствующая максимуму $\bar{n}_d \bar{n}_b$. Слева и справа от указанных значений k_a демпфирования вертолета недостаточно, поэтому имеются зоны неустойчивости.

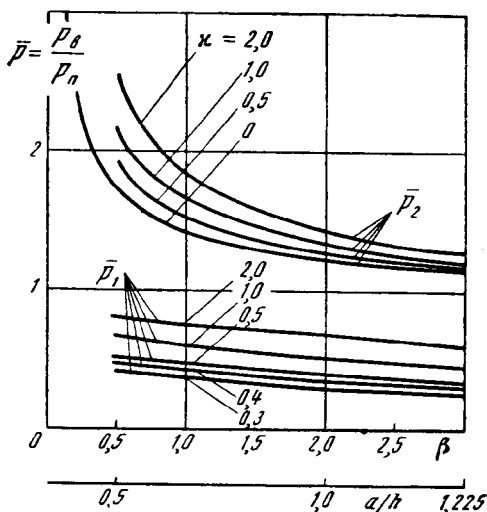
Зона неустойчивости, соответствующая малым значениям k_a , располагается в районе рабочих чисел оборотов. При больших k_a , когда

амортизационная стойка приближается к абсолютно жесткой, а частота собственных колебаний — к частоте колебаний на пневматиках, зона неустойчивости расположена выше рабочих чисел оборотов.

При решении нелинейной задачи о колебаниях вертолета типа земной резонанс исследована возможность снижения зоны неустойчивости (при больших значениях k_a ; см. фиг. 4) вследствие уменьшения частоты собственных колебаний при отрыве пневматиков от земли. В этом случае фюзеляж имел еще одну степень свободы (вертикальные смещения) и жесткостные характеристики пневматиков принимались такими, как на фиг. 5.



Фиг. 5



Фиг. 6

Эта задача решалась на электроинтеграторе при начальных условиях, имитировавших грубые посадки с креном или большие неровности почвы. Эти расчеты показывают, что при числе оборотов винта, меньших критических и соответствующих границе зоны неустойчивости, земной резонанс с подпрыгиванием не возникает, т. е. опасность снижения зоны неустойчивости отсутствует. Это объясняется тем, что при уменьшении частоты собственных колебаний одновременно увеличивается и располагаемое демпфирование $\bar{n}_a$, так что зона неустойчивости, кроме того, что опускается, еще и сдвигается в сторону больших значений k_a (т. е. для фиксированного k_a сужается) или исчезает при превышении располагаемого демпфирования над потребным, так что нижняя граница области неустойчивости практически не сдвигается по частотам. На графике фиг. 4 точками обозначены те сочетания k_a и ω , при которых производилось решение.

В области, соответствующей малым значениям k_a , при уменьшении числа оборотов винта возникают нарастающие колебания, как только достигается (или переходится) граница зоны неустойчивости, однако за счет нелинейности (отрыва пневматиков от земли) амплитуда колебаний быстро ограничивается и величина ее оказывается в прямой пропорциональной зависимости от нагрузки на колесо $\Delta\bar{G}$ (для фиксированных k и ω). На реальном вертолете попадание в такую зону неустойчивости (например, при выключении двигателя) осложняется еще и тем, что уменьшается тяга несущего винта и увеличивается $\Delta\bar{G}$, что приводит к увеличению амплитуды колебаний.

На основании изложенного выше можно рекомендовать такое практическое выполнение выбранного демпфирования амортизационной стойки k_a , при котором все погрешности будут в сторону увеличения демпфирования, так как в этом случае не возникает опасность попадания

в зону неустойчивости, если она появляется при больших отклонениях от $k_{a \text{ opt}}$.

Таким образом, при выборе $p_n \geq \omega_{\max}$ и $k_a \geq k_{a \text{ opt}}$ можно обеспечить необходимый запас по числам оборотов и демпфированию.

При меньших значениях относительной жесткости амортизации превышение располагаемого демпфирования над потребным будет иметь место в большем диапазоне изменения демпфирования стойки k_a по сравнению с приведенным на фиг. 4, где $k=0,45$.

Выбранные указанным образом жесткости и демпфирования обеспечивают отсутствие земного резонанса также и в случае, когда пневматик обладает жесткостью и в поперечном направлении (боковая жесткость c_{zn}) при малой скорости качения и на стоянке. Это объясняется тем, что частота колебаний увеличивается, а вместе с ней и зона неустойчивости (если она до этого существовала) смещается, как известно, на большие числа оборотов. Наряду с этим уменьшается и параметр связи ε , так как в случае $c_{zn}=0$ колебания происходят вокруг центра тяжести вертолета, а при $c_{zn} \neq 0$ узел колебаний приближается к втулке, т. е. увеличивается приведенная масса фюзеляжа [2]. Уменьшение же ε , как известно, приводит к сужению зоны неустойчивости [3], так что нижняя граница зоны неустойчивости еще более повышается по сравнению со случаем $c_{zn}=0$.

При $c_{zn} \neq 0$, когда поперечные колебания вертолета состоят из двух перемещений: поворота вокруг центра тяжести и поступательного смещения в боковом направлении, имеются уже две собственные частоты. Одна из них располагается выше, а другая ниже частоты чисто угловых колебаний фюзеляжа. Как уже отмечалось, при колебаниях вертолета по высшей форме запасы по числам оборотов до границы зоны неустойчивости увеличиваются по сравнению с колебаниями по чисто крутильной форме ($c_{zn}=0$). Вместе с этим необходимо обеспечить безопасность при колебаниях по низшей форме, например, при раскрутке несущего винта. Для этого необходимо обеспечить более низкую собственную частоту этой формы колебаний. Это позволит иметь большие значения демпфирования вертолета и соответственно большие запасы. На фиг. 6 приведена зависимость частот собственных колебаний по этим двум формам в функции параметра

$$\beta = \frac{c_n}{c_{zn}} \left(\frac{a}{h} \right)^2,$$

где h — расстояние от ц. т. вертолета до земли.

Этот график построен на основании результатов работы [1].

Если учесть, что соотношение боковой и вертикальной жесткости пневматиков — примерно постоянная величина, то масштаб по оси абсцисс можно выразить через отношение a/h . На графике даны значения частот собственных колебаний, отнесенных к частоте колебаний на пневматиках при $c_{zn}=0$ и при различных значениях параметра

$$\chi = \frac{I_{x0}}{mh^2},$$

где m — масса вертолета.

Для одновинтовых вертолетов значение этого параметра находится в пределах 0,25—0,4. Пользуясь этим графиком, можно определить a и h , при которых обеспечивается необходимое положение частоты низшего тона собственных колебаний вертолета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродко Л. Н. Земной резонанс. В кн. „Вертолеты“, ч. II, Изд. „Машиностроение“, 1967.
 2. Гродко Л. Н. Самовозбуждающиеся колебания вертолета на пробеге (см. стр. 28 в настоящем сборнике).
 3. Жеребцов Б. Я. Динамическая устойчивость несущего винта вертолета с учетом упругости его опоры. Сб. работ по теоретическому исследованию явления земной резонанс вертолета. Изд. БНИ ЦАГИ, 1966.
 4. Жеребцов Б. Я. Исследование характеристик упругости и демпфирования вертикальной амортизационной стойки шасси с рычажной подвеской колеса при колебаниях вертолета на земле. Изд. БНИ ЦАГИ, 1966.
 5. Horvay G. Vibrations of a helicopter on the ground. JAS, No. 11, November 1946.
-

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
О развитии теории земного резонанса вертолетов. <i>А. И. Пожалостин</i> . . .	3
Исследование земного резонанса вертолета при наличии маховых колебаний лопастей несущего винта. <i>А. Б. Зимин</i>	8
Земной резонанс вертолета на пробеге. <i>Л. Н. Гродко</i>	28
Земной резонанс вертолета с отрывом пневматиков от земли. <i>А. Н. Белозеров</i>	42
Исследование земного резонанса вертолета при отрыве пневматиков от земли с учетом боковой жесткости и демпфирования пневматика. <i>Г. В. Вронский</i>	58
Исследование динамики шасси с учетом нелинейности его характеристик примениительно к задаче о земном резонансе вертолетов. <i>А. Н. Белозеров, Б. М. Литваков</i>	77
Выбор характеристик шасси вертолета из условий земного резонанса. <i>Ю. А. Мягков</i>	106

Отв. редакторы **А. Ф. Минаев** и **Г. А. Олейников**
Изд. редактор **О. В. Мелеги**

Техн. редактор **М. Н. Евстигнеева**

Корректор **И. И. Паскалов**

Рукописи поступили 27/XI 1969 г. Цена 71 коп. Подписано в печать 7/IV 1970 г.
Формат бумаги $70 \times 108/16 = 3,625$ б. л. = 10,15 печ. л. Уч.-изд. л. 11,15. Тираж 203 экз.

Т-01255

Типография ЦАГИ

Зак. № 656